

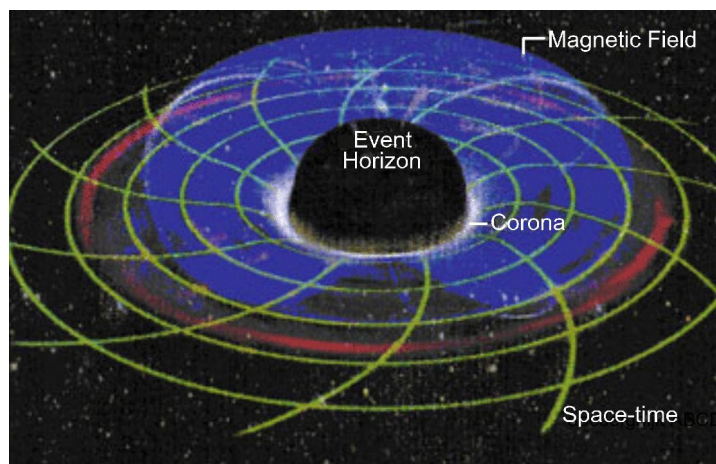
Diplomarbeit

Untersuchung quasistationärer Übergänge zu Schwarzen Löchern

Thomas Fischer*

Arbeitsgruppe Gravitationstheorie
Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Jena, den 15. Dezember 2003



*Fischer@tpi.uni-jena.de

Titelbild: Darstellung eines stark rotierenden Schwarzen Loches, wie es beispielsweise im Zentrum der 130 Millionen Lichtjahre entfernten Galaxie MCG-6-30-15 vermutet wird [31]. Der umgebende Raum wird durch die ungeheure Gravitationswirkung gewissermaßen mitgerissen. Innerhalb der sogenannten Ergosphäre ist es einem Beobachter nicht mehr möglich zu ruhen, er muß ebenfalls eine Rotationsbewegung vollführen.

Eingereicht am: 15. Dezember 2003

durch: Thomas Fischer

geboren am: 21. Juni 1978

in: Jena

Erstgutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Reinhard Meinel

Zweitgutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Gernot Neugebauer

Tag der Verleihung des Diploms: 22. Dezember 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Relativistische Sterne	1
1.1 Kugelsymmetrische Metrik und Feldgleichungen	1
1.2 Das AKM-Verfahren	4
1.2.1 Gebiete und Koordinatentransformationen	4
1.2.2 Übergangsbedingungen	5
1.2.3 Darstellung der Funktionen durch CHEBYSHEV-Polynome	6
1.2.4 Der Algorithmus	7
1.3 Zustandsgleichungen	10
1.3.1 Polytrope Sterne	11
1.3.2 Die CHANDRASEKHAR Zustandsgleichung	11
1.3.3 Beliebige Zustandsgleichung	14
1.3.4 Modifikationen	15
2 Numerische Resultate für sphäroidale Sterne	17
2.1 Untersuchungen zu verschiedenen Zustandsgleichungen	17
2.1.1 Masse-Zentraldruck-Relation	18
2.1.2 Masse-Radius-Relation	20
2.1.3 Maximale Masse	21
2.1.4 Der CHANDRASEKHAR-Stern maximaler Masse	22
2.2 Konvergenzuntersuchungen	23
2.2.1 Verifikation der Lösung	23
2.2.2 Abhängigkeit von der Zustandsgleichung	26
2.2.3 Experimentelle Erfahrungen	27
3 Das AKM-Verfahren für toroidale Sterne	31
3.1 Metrik und Feldgleichungen	31

3.2	Zustandsgleichung	33
3.3	Koordinatentransformationen	34
3.3.1	Innengebiet	35
3.3.2	Außengebiete	36
3.4	Darstellung der metrischen Funktionen	37
3.5	Bemerkungen zum Programmablauf	39
4	Übergänge zu Schwarzen Löchern	41
4.1	Der minimale Radius kugelsymmetrischer Sterne	41
4.2	Die KERR-Raumzeit	43
4.3	Asymptotik der Innenwelt	45
4.4	Homogene Sterne	48
4.5	Ringe mit CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung	51
4.6	Ein physikalischer Weg zum Schwarzen Loch	53
5	Parallelisierung	57
5.1	Komplexitätsanalyse des AKM-Verfahrens	57
5.1.1	Berechnung der JACOBI-Matrix	58
5.1.2	Berechnung des Vektors $\vec{f}(\vec{x})$	58
5.1.3	Matrixinversion	61
5.1.4	Optimierungsmöglichkeiten	63
5.1.5	Gesamtüberblick über die notwendigen Ressourcen	64
5.2	Parallelisierung	64
5.2.1	Cluster-Computer	64
5.2.2	Parallelisierung des AKM-Verfahrens mittels MPI	65
5.2.3	PBS, Job-Skripte und Ansteuerung	66
5.3	Auswertung	66
	Ausblick	69
	A CHEBYSHEV-Entwicklungen	71
	B Nähere Angaben zum Programm	75
	Quellenverzeichnis	79
	Selbständigkeitserklärung	83
	Danksagung	85

Einleitung

*Das Universum ist nicht nur sonderbarer, als wir vermuten –
es ist sonderbarer, als wir überhaupt vermuten können.*

JOHN BURDON SANDERSON HALDANE (1892–1964)

Mit seiner berühmten Arbeit *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*¹ läutete ALBERT EINSTEIN ein neues Kapitel der Physik ein. Diese Arbeit über die Spezielle Relativitätstheorie kann man als Fortführung der LORENTZschen Elektrodynamik ansehen. In den folgenden Jahren beschäftigte sich EINSTEIN mit zahlreichen Phänomenen der Gravitation und Quantentheorie. Die Anstrengungen, ein allgemeines Relativitätsprinzip zu finden, d. h. alle physikalischen Gesetze in einheitlicher Form in beliebigen Bezugssystemen formulieren zu können, gipfelten 1915 mit der Präsentation der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die Struktur von Raum und Zeit bekam damit eine ganz neue geometrische Interpretation. Erste Gedanken, daß das Vorhandensein von Materie Einfluß auf die Metrik des Raumes hat, äußerte RIEMANN schon 1854.² Dennoch war es EINSTEIN selbst, der mit dem Aufstellen der Feldgleichungen ein klares mathematisches Konzept der Relativitätstheorie formulierte.

Schon in den Folgejahren gelang es, aus diesen Gleichungen eine Vielzahl relativistischer Effekte vorherzusagen und Gesetzmäßigkeiten abzuleiten. 1916 fand KARL SCHWARZSCHILD die erste exakte Lösung der Feldgleichungen, nämlich die Außenraum-Metrik einer kugelsymmetrischen Massenverteilung. EINSTEIN entdeckte in der linearisierten Form seiner Gleichungen die Gravitationswellen und konnte die Quadrupolformel der Energieabstrahlung durch Gravitationswellen herleiten. Ebenso wurde versucht, die Theorie auf das gesamte Universum anzuwenden. EINSTEIN, FRIEDMANN und HUBBLE leiteten damit die Ära der modernen Kosmologie ein.

Die Komplexität der EINSTEINSchen Feldgleichungen zeigt sich in dem Umstand, daß erst 1963 durch KERR eine exakte Lösung für rotierende Objekte – nämlich das Vakuum-Gravitationsfeld eines rotierenden Schwarzen Loches – gefunden wurde. 1995 gelang es GERNOT NEUGEBAUER und REINHARD MEINEL für eine starr rotierende Staubscheibe mittels Solitonentechniken eine exakte Lösung zu konstruieren [18]. Angesichts der recht geringen Zahl analytisch bekannter Lösungen wird man kaum eine universelle Lösung der Feldgleichungen erwarten können. Selbst der NEWTONsche Grenzfall einfacher Sternmodelle weist

¹Ann. d. Physik **17**, 891 (1905).

²Postum veröffentlicht in Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen **13**, 133 (1868).

eine sehr komplexe Struktur auf [2]. Die Hauptschwierigkeit bei der Modellierung von Sternen liegt in der unbekannten Oberfläche. Ein solches freies Randwertproblem ist selbst bei linearen oder linearisierten Feldgleichungen hochgradig nichtlinear.

Als Alternative und Ergänzung zu den exakten Lösungen, entstanden mit der Verfügbarkeit von Rechentechnik numerische Verfahren. Etwa in den 70er Jahren wurden Algorithmen zur Berechnung rotierender astrophysikalischer Objekte von BONAZZOLA, SCHNEIDER, BUTTERWORTH, IPSE, u. a. entwickelt.

Um besonders hohe Genauigkeiten zu erreichen, setzen sich zunehmend spektrale Verfahren durch. Ein solches Programm wurde in den letzten Jahren von MARCUS ANSORG, ANDREAS KLEINWÄCHTER und REINHARD MEINEL entwickelt. Dieses „AKM-Verfahren“ gestattet es, Sterne sehr genau (bis Maschinengenauigkeit) zu berechnen und arbeitet auch in Grenzfällen noch numerisch stabil.

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit steht unter dem Arbeitstitel

Weiterentwicklung eines Computer-Programms zur Berechnung relativistischer Sternmodelle und Untersuchung quasistationärer Übergänge zu Schwarzen Löchern.

Im Zuge der Modifikationen der AKM-Programme wurden zum einen axialsymmetrische sphäroidale Sterne mit verschiedenen Zustandsgleichungen eingehend untersucht. Die Darstellung dieser Ergebnisse ist ebenfalls Bestandteil dieser Arbeit, obwohl toroidale Konfigurationen beim Übergang zu Schwarzen Löchern die Hauptrolle spielen.

Die Diplomarbeit gliedert sich wie folgt. Wir beginnen im ersten Kapitel – um einen möglichst einfachen Einstieg bemüht – mit der Behandlung des AKM-Verfahrens am Beispiel kugelsymmetrischer Sterne mit beliebiger Zustandsgleichung. Da man in diesem Fall mit wenig Rechenaufwand sehr hohe Entwicklungsordnungen erreicht, wurde dieses Programm zu intensiven Konvergenztests herangezogen, wie im zweiten Kapitel dargestellt. Weiterhin präsentieren wir dort die Ergebnisse zu den Berechnungen axialsymmetrischer Sterne sphäroidaler Topologie.

Im dritten Kapitel wird das AKM-Verfahren für toroidale Konfigurationen beschrieben, da diese den parametrischen Übergang zu Schwarzen Löchern gestatten. Dies ist das Anliegen des vierten Kapitels. Nach der Diskussion der KERR-Lösung und einem kurzen Überblick über die Lösungsklassen homogener Sterne (Sterne konstanter Massendichte) analysieren wir einen konkreten quasistationären Übergang eines ringförmigen Sterns zu einem rotierenden Schwarzen Loch. Dabei wird die etwas realistischere Zustandsgleichung eines vollständig entarteten idealen Neutronengases (CHANDRASEKHAR-Modell) verwendet.

Das letzte Kapitel widmet sich der Komplexitätsanalyse und Verbesserungen des AKM-Verfahrens sowie der Parallelisierung der Programme, damit sie auf Cluster-Computern einsetzbar werden.

Im ersten Anhang sind einige wichtige Eigenschaften der CHEBYSHEV-Polynome zusammengetragen, die aufzeigen sollen, warum gerade spektrale Methoden in der Numerik außerordentliches Potential besitzen.

Der zweite Anhang enthält eine etwas detailliertere Dokumentation zu den parallelisierten Programmversionen und den zugehörigen Dateien.

Notationen und Konventionen

Für Koordinatenindizes verwenden wir lateinische Buchstaben (i, j, k, \dots) , die von 0 bis 3 laufen. Häufig schreiben wir stattdessen auch die Koordinatenvariable selbst.

Für die in dieser Arbeit auftretenden axialsymmetrischen Metriken gebrauchen wir meist die Koordinaten (t, ρ, ζ, ϕ) , die in dieser Reihenfolge den Indizes 0 bis 3 entsprechen. Als Signatur verwenden wir $(-, +, +, +)$. Für partielle Ableitungen schreiben wir

$$\partial_k A = \frac{\partial A}{\partial x^k} = A_{|k}$$

und für kovariante Ableitungen

$$\nabla_k A = A_{||k}.$$

Dabei ist k entweder eine arabische Ziffer oder die Koordinatenvariable selbst. In der Literatur findet man auch A_k (hier mit k als Koordinatenvariable) und $A_{,k}$ für $\partial_k A$ sowie $A_{;k}$ für $\nabla_k A$.

Die Lichtgeschwindigkeit c und die Gravitationskonstante G setzen wir – ohne Einschränkung der Allgemeinheit – gleich eins. Zum besseren Vergleich mit anderer Literatur sind c und G manchmal trotzdem mit angegeben. Eine weitere Reduktion der Einheiten wird sich im Abschnitt 2.1 ergeben, wenn man die dimensionslose polytrope Zustandsgleichung mit der von CHANDRASEKHAR vergleicht. Dabei erhalten wir $\hbar = 1.3244 \times 10^{-77}$, vgl. Tabelle 2.1.

Häufig verwendete Indizes:

Index	Bedeutung	Beispiele
B	an der Sternoberfläche (boundary)	V_B, v_B, \dots
i, (int)	im Sterninneren (interior)	$W^{(\text{int})}, J_i, M_i^3, \dots$
e, (ext)	im Außenraum (exterior)	$W^{(\text{ext})}, J_e, M_e, \dots$

In dieser Arbeit tauchen ab und zu englische Bezeichnungen auf. Diese stammen entweder aus der Informatik oder sind Begriffe, die in den für diese Arbeit relevanten Publikationen vorkommen. In beiden Fällen sind oft nur die englischen Termini etabliert, bei der (nicht eindeutigen) Übersetzung müßte man feststehende Begriffe jedes Mal neu erklären. Ebenso wird mit der Schreibweise von Namen verfahren, die ursprünglich aus nicht lateinischen Buchstaben bestehen. Für ЧЕБЫШЕВ schreiben wir CHEBYSHEV, da dieser Name auch in Bezeichnungen von Computer-Routinen in vorgefertigten Bibliotheken auftritt.

³Natürlich befindet sich die Materie nur im Inneren des Sterns, die Bezeichnungen M_i und M_e beziehen sich nur auf die Art der Berechnung der Masse, nämlich entweder durch Integration über die Materieverteilung im Inneren oder durch das asymptotische Verhalten der Metrik im Außengebiet.

KAPITEL 1

Relativistische Sterne

In diesem Kapitel wird das AKM-Verfahren – eine Methode zur numerischen Modellierung axialsymmetrischer Lösungen der EINSTEINSchen Feldgleichungen – erläutert. Um die Beschreibung so einfach wie möglich zu machen, werden wir uns jedoch zunächst auf kugelsymmetrische Sterne konzentrieren und den allgemeineren Fall axialsymmetrischer Körper erst in Kapitel 3 anhand ringförmiger Sterne behandeln.¹

Zuerst werden die verwendete Metrik und die resultierenden Gleichungen für die darin vorkommenden Funktionen angegeben. Anschließend wird der Raum in mehrere Gebiete aufgeteilt. Die unbekannten Funktionen werden dort jeweils nach CHEBYSHEV-Polynomen entwickelt. Unter Einarbeitung von vorzugebenden Parametern sowie Rand- und Regularitätsbedingungen entsteht ein algebraisches Gleichungssystem für die gesuchten CHEBYSHEV-Koeffizienten. Dieses wird mit einem NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst.

Wir werden die Implementation verschiedener Zustandsgleichungen in dieses Verfahren darstellen und mögliche Verbesserungen durch andere Gebietsaufteilungen diskutieren.

1.1 Kugelsymmetrische Metrik und Feldgleichungen

Prinzipiell darf man in der Allgemeinen Relativitätstheorie beliebige Koordinaten wählen, da alle Gleichungen kovariant formuliert werden können. Jedoch sind spezielle Eigenschaften, wie Symmetrien und asymptotische Flachheit² in dieser Allgemeinheit oft schwer zu erkennen. Beispielsweise ist bisher kein Verfahren bekannt, wie man (mit Ausnahme von Spezialfällen) Koordinatensingularitäten von echten metrischen Singularitäten unterscheiden kann.

Deshalb verwendet man häufig Koordinaten, die an die Symmetrien angepaßt sind. Dadurch lassen sich oft sowohl die Anzahl der metrischen Funktionen, als auch die Zahl der Koordinaten von denen diese abhängen, reduzieren.

¹Eine detaillierte Beschreibung des AKM-Verfahren für axialsymmetrische Sterne sphärischer Topologie findet man in [4] und [23].

²siehe dazu [29, Kap. 11]

Bevor man sich nun für eine konkrete Darstellungsform der Metrik entscheidet, müssen die Übergangsbedingungen an der Sternoberfläche, sowie Regularitäts- und Randbedingungen beachtet werden. Im axialsymmetrischen, stationären Fall bieten sich LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten an, die sich eindeutig durch die Forderung charakterisieren lassen, daß die metrischen Funktionen und deren erste Ableitungen an der Sternoberfläche stetig übergehen.

Im sphärisch symmetrischen, statischen³ Fall verwenden wir stattdessen SCHWARZSCHILD-Koordinaten. Das Linienelement hat dann die Form

$$\begin{aligned} ds^2 &= -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &= -e^{2V(r)}dt^2 + e^{2(k(r)-V(r))}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Die EINSTEINSchen-Feldgleichungen lauten⁴

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = 8\pi T_{ik}. \quad (1.2)$$

Dabei ist g die metrische Fundamentalform (Linienelement), $R_{ik} = R^m{}_{imk}$ der RICCI-Tensor und $R = R^i{}_i = g^{ik}R_{ki}$ der Krümmungsskalar. R_{ik} und R sind Funktionen der Metrik und ihrer ersten und zweiten Ableitungen. T_{ik} ist der Energie-Impuls-Tensor. Er lautet für ideale fluide Medien

$$T^{ik} = (\mu + p)u^i u^k + pg^{ik}, \quad u^k = e^{-V}\delta_0^k. \quad (1.3)$$

Die Feldgleichung reduzieren sich damit zu ($' = \frac{d}{dr}$)

$$-R_{00} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA} = 4\pi(\mu + 3p)B, \quad (1.4a)$$

$$-R_{11} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA} = 4\pi(\mu - p)A, \quad (1.4b)$$

$$-R_{22} = 1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} = 4\pi(\mu - p)r^2. \quad (1.4c)$$

Die Gleichung für die (33)-Komponente ist bis auf einen Faktor identisch mit der (22)-Komponente, die anderen Komponenten von R_{ik} sind identisch null. Für den Außenraum

³Nach dem BIRKHOFF-Theorem kann man zu jeder kugelsymmetrischen Vakuum-Lösung eine Koordinate t finden, von der die metrischen Funktionen unabhängig sind. Außerhalb des SCHWARZSCHILD-Radius der eindeutig resultierenden SCHWARZSCHILD-Lösung ist t auch zeitartig, was die Bezeichnung „statisch“ rechtfertigt. Dagegen müssen wir für das Sterninnere Statik fordern, d. h. radiale Massenströmungen ausschließen. Für einen solchen Stern liegt die Oberfläche auch stets außerhalb des SCHWARZSCHILD-Radius, siehe Abschnitt 4.1.

⁴Im Rahmen der Kosmologie wird häufig noch ein Zusatzterm Λg_{ik} betrachtet. Während eine von null verschiedene kosmologische Konstante Λ Einfluß auf die Globalstruktur des Universums hat, spielt sie für einzelne Sterne keine Rolle. Im NEWTONschen Grenzfall kann man $\Lambda/8\pi$ als Vakuumenergiedichte interpretieren. Jedoch sind die NEWTONschen Feldgleichungen empirisch so gut verifiziert, daß Λ sehr klein sein muß und erst ab Skalen von 10^5 Lichtjahren (Durchmesser von Galaxien) in Erscheinung treten kann, vgl. [12, Kap. 21].

sind p und μ gleich null zu setzen. Zusammen mit einer noch vorzugebenden Zustandsgleichung $\mu = \mu(p)$, sind das vier Gleichungen für die vier gesuchten Funktionen $A(r)$, $B(r)$, $p(r)$ und $\mu(r)$.

Aus $\frac{A}{B}R_{00} + \frac{AB'}{2Br}R_{22}$ folgt

$$\boxed{V'' + \frac{V'}{r}(1+A) = 4\pi A(\mu + 3p + V'r(\mu - p))}. \quad (1.5)$$

Dabei wurden unter Zuhilfenahme der Formeln $A = e^{2(k-V)}$ und $B = e^{2V}$ die Ableitungen gemäß $\frac{A'}{2A} = k' - V'$, $\frac{B'}{2B} = V'$ und $\frac{B''}{2B} = V'' + 2(V')^2$ ersetzt.

Aus $\frac{A}{B}R_{00} + R_{11} - \frac{2A}{r^2}R_{22}$ ergibt sich

$$\frac{4V'}{r} - \frac{2A}{r^2} + \frac{2}{r^2} = 16\pi A p,$$

und daraus

$$\boxed{A = \frac{2V'r + 1}{8\pi r^2 p + 1}}. \quad (1.6)$$

Im Gegensatz zur NEWTONschen Theorie enthalten die Feldgleichungen schon die relativistische Form der EULER-Gleichung $T^{ik}_{||k} = 0$, da die kovariante Divergenz des EINSTEIN-Tensors $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik}$ verschwindet. Als dritte Gleichung können wir daher auch die einzige nichttriviale Komponente dieser Beziehung verwenden. Es gilt

$$T^{1k}_{||k} = \frac{B'}{2AB}(\mu + p) + \frac{p'}{A} = 0.$$

Daraus ergibt sich⁵

$$V' + \frac{p'}{\mu + p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = V_B - \int_0^p \frac{d\tilde{p}}{\mu(\tilde{p}) + \tilde{p}}}. \quad (1.7)$$

Für die gebräuchlichsten Zustandsgleichungen kann man dieses Integral explizit auswerten, siehe auch Abschnitt 1.3, insbesondere Gleichung (1.14).

Wenn man dann noch (1.6) in (1.5) einsetzt, verbleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung von $V(r)$. Hierbei handelt es sich um eine zur bekannten TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF-Gleichung äquivalente Beziehung.

Da es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung handelt, bieten sich dafür ausgelegte numerische Lösungsverfahren, wie beispielsweise das RUNGE-KUTTA-Verfahren an, siehe z. B. [14]. Im axialsymmetrischen Fall ergibt sich jedoch ein System partieller Differentialgleichungen, welches erheblich aufwendigere Lösungsmethoden – wie beispielsweise die AKM-Methode – erfordert. Deshalb wollen wir dieses Verfahren auch für unser recht einfaches Problem studieren.

⁵Diese Formel zur Berechnung von Druck und Dichte aus dem metrischen Potential V und der Zustandsgleichung gilt auch im axialsymmetrischen Fall.

1.2 Das AKM-Verfahren

Das AKM-Verfahren wurde zur hoch genauen numerischen Berechnung von rotierenden Neutronensternen entwickelt. In diesem Abschnitt soll es am Beispiel sphärisch symmetrischer Sterne dargestellt werden. Die meisten Überlegungen lassen sich direkt auf den allgemeineren axialsymmetrisch, stationären Fall übertragen. Im Kapitel 3 werden wir genau dies für toroidale Sterne tun.

Prinzipiell ist das Verfahren für beliebige Konfigurationen anwendbar, die asymptotisch flach, stationär, axial- und reflexionssymmetrisch⁶ sind, starr rotieren und deren Materie durch eine ideale Flüssigkeit mit barotropischer Zustandsgleichung $\mu = \mu(p)$ beschrieben wird.⁷

1.2.1 Gebiete und Koordinatentransformationen

Der Koordinatenraum wird zunächst bzgl. der Zustandsgleichung in Gebiete aufgeteilt. Wir haben zunächst ein Außen- und ein Innengebiet.⁸ Diese Gebiete können anhand des qualitativen Verhaltens der metrischen Funktionen weiter unterteilt werden, beispielsweise in oberflächennahe, Fernfeld- und Zwischen-Gebiete.

In jedem Gebiet wählt man eine Form des Linienelementes. Im Inneren von rotierenden Sternen empfiehlt sich ein mitbewegtes Koordinatensystem. Anschließend werden die Feldgleichungen in dieser Metrik aufgeschrieben.

Jedes Gebiet wird nun durch eine Koordinatentransformation auf ein Einheitsquadrat bzw. Einheitsintervall abgebildet. In diese Koordinatentransformation dürfen die noch unbekannten Funktionen, die die Gebietsgrenzen (z. B. Sternoberfläche) beschreiben, eingehen. Durch geeignete Wahl dieser Koordinatentransformationen lassen sich Regularitätsforderungen, wie das Verschwinden bestimmter Ableitungen auf der Rotationsachse und an der Äquatorebene direkt implementieren.

Für unseren sphärisch symmetrischen Stern haben wir zwei Gebiete, nämlich das Sterninnere und das Außengebiet. Aufgrund der Kugelsymmetrie ist der Stern-(Koordinaten-)Radius r_B die einzige Unbekannte bei der Gebietsaufteilung. In beiden Gebieten haben wir dasselbe Linienelement – nämlich die SCHWARZSCHILD-Metrik (1.1) – gewählt und die Feldgleichungen formuliert. Im Außengebiet reduzieren sich (1.6) und (1.5) auf

$$V'' + \frac{V'}{r}(2 + 2V'r) = 0 \quad (1.8)$$

⁶D. h. es existiert eine Äquatorebene bzgl. derer der Stern spiegelsymmetrisch ist.

⁷Eine außergewöhnlich schnelle Konvergenz des Verfahrens tritt aber nur für spezielle Zustandsgleichungen auf, vgl. Abschnitt 2.2.

⁸Im Grenzfall der Bildung eines Zweikörpersystems muß man mit zwei Innengebieten arbeiten.

mit der Lösung (beachte $B = e^{2V}$)

$$B(r) = c_1 - \frac{c_2}{r} = 1 - \frac{r_s}{r} = 1 - \frac{2M}{r} \quad \text{und} \quad A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (1.9)$$

Die Konstante $c_2 = r_s = 2M$ wird SCHWARZSCHILD-Radius genannt und $c_1 = 1$ ergibt sich aus der asymptotischen Flachheit.

Im Innengebiet ist die Lösung im allgemeinen nicht analytisch angebar. Um das AKM-Verfahren anzuwenden, geben wir nun eine Koordinatentransformation an, die das Sterninnere auf das Intervall $s \in [0, 1]$ abbildet:

$$\boxed{r^2 = x \quad \text{mit} \quad x = x_B \cdot s, \quad x_B = \sqrt{r_B} = \text{const.}} \quad (1.10)$$

Die Einführung der quadrierten Koordinate x gewährleistet automatisch die Regularitätsbedingung $V'|_{r=0} = 2r \frac{dV}{dx} \big|_{r=x=0} = 0$ falls $V(x)$ selbst regulär ist, was durch die nachfolgende CHEBYSHEV-Entwicklung gewährleistet wird.

1.2.2 Übergangsbedingungen

Da wir in beiden Gebieten dieselben Koordinaten und Linienelemente verwendet haben, müssen die metrischen Funktionen $A(r)$ und $B(r)$ und damit auch $V(r)$ an der Sternoberfläche ($r = r_B$) stetig übergehen. Aus (1.6) und (1.9) folgt, daß auch $V'(r)$ und somit $B'(r)$ stetig ist.

Dagegen muß $A'(r)$ nicht unbedingt stetig übergehen, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} (A'_B)^{(\text{ext})} &= \left(\frac{1}{B} \right)'_B = \left(-\frac{B'}{B} \cdot \frac{1}{B} \right)_B = -2V'_B A_B \\ (A'_B)^{(\text{int})} &\stackrel{(1.6)}{=} 2V''_B r_B + 2V'_B - (2V'_B r_B + 1) \cdot 8\pi r_B^2 \rho'_B \\ &\stackrel{(1.5)}{=} -2V'_B A_B + 8\pi r_B A_B (1 + r_B V'_B) \mu_B. \end{aligned}$$

Bei einer „weichen“ Zustandsgleichung, d. h. $\mu(p \rightarrow 0) \rightarrow 0$, geht auch $A'(r)$ an der Oberfläche stetig über. Im Falle einer „harten“ Zustandsgleichung, wie beispielsweise beim häufig verwendeten Modell konstanter Dichte, ergibt sich ein Sprung.

Dies stellt aber kein Problem dar, da es nur zwei offene Integrationskonstanten, nämlich r_s und V_B gibt. Eine der beiden parametrisiert die Lösungsschar, die andere fixieren wir durch den stetigen Übergang von $A(r)$, was ja wegen (1.6) äquivalent zur Stetigkeit von $V'(r)$ ist. Mit (1.9) lautet diese Bedingung

$$\boxed{e^{-2V_B} = 2V'_B r_B + 1.} \quad (1.11)$$

1.2.3 Darstellung der Funktionen durch CHEBYSHEV-Polynome

Zunächst beginnen wir wieder mit dem allgemeinen axialsymmetrischen Fall und spezialisieren später.

Die gesuchten metrischen Funktionen werden in sinnvoller Weise durch Randwertfunktionen⁹ und metrische Potentiale dargestellt, die auf dem Einheitsquadrat (bzw. Einheitsintervall) definiert sind. In die dazu notwendigen Koordinatentransformationen geht die ebenfalls unbekannte Sternoberfläche ein, die durch eine auf dem Einheitsintervall definierte Funktion beschrieben wird.

Nun werden diese Potentiale, ihre Randwertfunktionen und die Oberflächenfunktion nach CHEBYSHEV-Polynomen entwickelt. Als Unbekannte treten jetzt die Entwicklungskoeffizienten bis zu einer vorgegebenen Ordnung m auf. Differentiation kann dann auf einfache algebraische Weise im Koeffizientenraum erfolgen. Da die zu erfüllenden Gleichungen nicht-linear sind, müssen die Funktionen (und deren Ableitungen) wieder im Konfigurationsraum ausgewertet werden.¹⁰ Dies ist mittels der schnellen CHEBYSHEV-Transformation (FCT) mit vertretbarem Aufwand möglich. Das AKM-Verfahren läßt sich deshalb als *Mehrgebiets-Pseudospektralmethode zur Lösung von freien Randwertproblemen* charakterisieren.

Eine detaillierte Abhandlung zu CHEBYSHEV-Polynomen, deren Eigenschaften sowie algorithmische Umsetzungen findet man in [22]. Hier fassen wir nur die wesentlichsten Fakten zusammen.

Die CHEBYSHEV-Polynome sind auf dem Intervall $[-1, +1]$ definiert durch¹¹

$$T_j(t) = \cos(j \arccos t), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Die Entwicklung m -ter Ordnung einer Funktion f

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} c_j T_j(t) \quad \text{mit} \quad c_j = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f(t_k) T_j(t_k)$$

ist an den Nullstellen

$$t_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m}$$

der CHEBYSHEV-Polynome exakt.¹² Daher werden wir die Funktionen und schließlich unsere Feldgleichungen auch immer an diesen Stellen auswerten. Diese Formeln lassen sich recht einfach auf den mehrdimensionalen Fall übertragen.

⁹Durch gemeinsame Randfunktionen erreicht man die Stetigkeit an den Gebietsgrenzen. Desweiteren läßt sich das korrekte asymptotische Verhalten der metrischen Funktionen implementieren.

¹⁰Solche Verfahren nennt man *pseudospektral*.

¹¹Man findet leicht eine Rekursionsformel anhand derer man zeigen kann, daß $T_j(t)$ tatsächlich ein Polynom j -ten Grades ist.

¹²Man beachte die Orthogonalitätsrelation $\sum_{k=1}^m T_i(t_k) T_j(t_k) = \frac{m}{2} (\delta_{ij} + \delta_{i0} \delta_{j0})$.

Da wir aus technischen Gründen $[0, 1]$ -Intervalle bevorzugen, müssen wir das Argument entsprechend transformieren, d. h. wir schreiben stets $T_j(2s - 1)$. Die zugehörigen Nullstellen lauten

$$s_k = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m} \right) = \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4m}. \quad (1.12)$$

Einige ergänzende Bemerkungen zu den CHEBYSHEV-Polynomen und deren besonderer Bedeutung in der Numerik befindet sich im Anhang A.

Kommen wir zum kugelsymmetrischen Stern zurück. Wir müssen nur die Funktion $V(r)$ darstellen. An der Oberfläche haben wir wegen der Kugelsymmetrie nur einen Randwert, keine ortsabhängige Funktion. Als Darstellung wählen wir

$$e^V = e^{V_B} + (s-1)H(s), \quad (1.13)$$

wobei $H(s)$ nach CHEBYSHEV-Polynomen entwickelt wird. Dieser Ansatz sichert den richtigen Randwert e^{V_B} an der Oberfläche ($s = 1$).

Vor allem in Außengebieten sollte der Potentialansatz das asymptotische Verhalten – soweit bekannt – berücksichtigen, um den Algorithmus robuster¹³ zu machen. Durch einen aufwendigeren Ansatz ließe sich prinzipiell auch die Stetigkeit von $V'(r)$ unterbringen, wir werden dies aber durch eine eigene Gleichung fordern.

1.2.4 Der Algorithmus

Die Idee des Programms besteht einfach darin, alle zu erfüllenden Gleichungen aufzusammeln und diese simultan durch ein NEWTON-RAPHSON-Nullstellenverfahren numerisch zu lösen.

In unserem Beispiel haben wir bei der Entwicklungsordnung m die Unbekannten:

- c_0, \dots, c_{m-1} (CHEBYSHEV-Koeffizienten für H , Gl. (1.13))
- e^{V_B} (Oberflächenwert von e^V , Gln. (1.7), (1.11) und (1.13))
- x_B (Quadrat des Sternradius, Gl. (1.10))

und folgende Gleichungen:

- Feldgleichungen im Inneren (Gl. (1.5) in Verbindung mit (1.12)), ausgewertet an den m Nullstellen des CHEBYSHEV-Polynoms $T_m(2s - 1)$, gegeben durch (1.12)
- Übergangsbedingung (1.11) für V'

¹³D. h. mit niedrigeren Entwicklungsordnungen auszukommen und größere Sprünge bei der Parametervorgabe zuzulassen, siehe folgender Abschnitt.

- Vorgabe eines Parameters, z. B. Masse, Radius, Rotverschiebung¹⁴ oder Zentraldruck.

Damit haben wir $m + 2$ Gleichungen für ebensoviele Unbekannte. Wir schreiben dieses zu lösende Gleichungssystem in der Form

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0.$$

In Abbildung 1.1 ist der gesamte Algorithmus zur Berechnung des Vektors \vec{f} zu gegebenem Variablenvektor \vec{x} aufgelistet. Dort symbolisieren die Indizes s und r die Ableitungen nach s und r . Die vorkommenden chebyshev-Routinen sollten soweit selbsterklärend sein, den zugrunde liegenden Code findet man in [22]. Die Funktionen `druck` und `dichte` beziehen sich auf die Umkehrfunktion von (1.7) in Verbindung mit der Zustandsgleichung, siehe dazu auch Abschnitt 1.3. Die beiden Zeilen ganz unten zur Berechnung von M_e und f_{m+2} stehen exemplarisch für vorgegebene Masse M und sind ggf. durch eine andere Parametervorgabe zu ersetzen.

Wie schon gesagt, wird das Gleichungssystem iterativ durch das NEWTON-RAPHSON-Verfahren

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^{(n)}) \right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(n)})$$

gelöst. Die JACOBI-Matrix wird durch den Differenzenquotienten

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \right)_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\vec{x}) \approx \frac{f_k(\vec{x} + \epsilon \vec{e}_i) - f_k(\vec{x} - \epsilon \vec{e}_i)}{2\epsilon}$$

approximiert und mit einem vollständig pivotisierten GAUSS-JORDAN-EliminationsVerfahren invertiert [22]. Um das Verfahren zu beschleunigen, kann man den Iterationsschritt mit ein und derselben Matrix mehrfach ausführen. Das wiederholt man beispielsweise solange wie $\|\vec{f}(\vec{x})\|$ kleiner wird (Maximum-Norm). Ist die Lösung danach noch zu ungenau, muß die JACOBI-Matrix neu berechnet und invertiert werden. Die optimale Konditionierung des Verfahrens bedarf einiger Praxiserfahrung. Wir verwenden $\epsilon \sim 10^{-6}$ und fordern $\|\vec{f}(\vec{x})\| \lesssim 10^{-8}$.

Für das NEWTON-RAPHSON-Verfahren braucht man noch eine Startlösung $\vec{x}^{(0)}$, die man zunächst aus analytisch bekannten Grenzfällen oder anderen numerischen Verfahren gewinnen kann. Danach lassen sich durch schrittweises Ändern der vorzugebenden Parameter beliebige Sterne der Lösungsschar berechnen.

Ebenso kann man eine Lösung näherungsweise in eine andere Entwicklungsordnung m umrechnen und anschließend mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren optimieren.

¹⁴Die Rotverschiebung eines an der Oberfläche emittierten Photons (ohne Bahndrehimpuls) bzgl. eines im Unendlichen ruhenden Beobachters beträgt $Z_0 = e^{-V_B} - 1$.

```

vector function  $f$ (vector  $x$ , integer  $m$ , float  $M$ )
   $H := \text{chebyshev\_polynomial}(x_1, \dots, x_m)$ 
   $H_s := \text{chebyshev\_derivate}(H)$ 
   $H_{ss} := \text{chebyshev\_derivate}(H_s)$ 
   $e^{V_B} := x_{m+1}$ 
   $x_B := x_{m+2}$ 
  for  $k := 1$  to  $m$ 
     $s := \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4m}$  (1.12)
     $r := \sqrt{x_B s}$  (1.10)
     $s_r := 2r/x_B$ 
     $s_{rr} := 2/x_B$ 
     $h := \text{chebyshev\_evaluate}(H, s)$ 
     $h_s := \text{chebyshev\_evaluate}(H_s, s)$ 
     $h_{ss} := \text{chebyshev\_evaluate}(H_{ss}, s)$ 
     $h_r := s_r h_s$ 
     $h_{rr} := s_{rr} h_s + s_r^2 h_{ss}$ 
     $e^V := e^{V_B} + (s-1)h$  (1.13)
     $e_r^V := s_r h + (s-1)h_r$ 
     $e_{rr}^V := s_{rr} h + 2s_r h_r + (s-1)h_{rr}$ 
     $V_r := e_r^V / e^V$ 
     $V_{rr} := e_{rr}^V / e^V - (e_r^V / e^V)^2$ 
     $p := \text{druck}(e^{V_B} / e^V)$  (1.7)
     $\mu := \text{dichte}(e^{V_B} / e^V)$ 
     $A := (2rV_r + 1) / (8\pi p r^2 + 1)$  (1.6)
     $f_k := V_{rr} + \frac{V_r}{r}(1+A) - 4\pi A(\mu + 3p + rV_r(\mu - p))$  (1.5)
  endfor
   $e_r^V := \frac{2}{\sqrt{x_B}} \cdot \text{chebyshev\_evaluate}(H, 1)$ 
   $f_{m+1} := 2e_r^V \sqrt{x_B} + e^{V_B} - 1/e^{V_B}$  (1.11)
   $M_e := (1 - (e^{V_B})^2) \sqrt{x_B} / 2$  (1.9)
   $f_{m+2} := M_e - M$ 
endfunction

```

Abbildung 1.1: Pseudocode zur Berechnung des Vektors \vec{f} beim AKM-Verfahren

Durch schrittweises Erhöhen von m ergeben sich so immer bessere Approximationen, die im Grenzfall $m \rightarrow \infty$ gegen die exakte Lösung konvergieren. Praktisch ist aber durch die Maschinengenauigkeit eine Obergrenze gegeben, die abseits von Grenzkonfigurationen mit diesem Verfahren tatsächlich erreichbar ist (vgl. Abschnitt 2.2).

Zur Verifikation der numerischen Lösungen gibt es mehrere unabhängige Tests. In Abschnitt 2.2.1 wird näher darauf eingegangen.

1.3 Zustandsgleichungen

Die Materie wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch den Energie-Impuls-Tensor T^{ik} beschrieben. Für eine ruhende ideale Flüssigkeit folgte aus der relativistischen EULER-Gleichung $T^{ik}_{||k} = 0$ die Gleichung (1.7)

$$\int_0^p \frac{d\tilde{p}}{\mu(\tilde{p}) + \tilde{p}} = V_B - V.$$

Die Integrationskonstante V_B ist der Wert von V an der Sternoberfläche, da hier der Druck verschwindet. Diese Gleichung, die die metrische Funktion V mit dem Druck verbindet, gilt auch im axialsymmetrischen Fall. Darauf gehen wir in Kapitel 3 genauer ein.

Diese Formel läßt sich leider im allgemeinen nicht explizit nach p auflösen. Jedoch kann man für eine große Klasse von Zustandsgleichungen eine einfachere Formel angeben. Im Bereich kleiner Temperaturen (siehe dazu Diskussion am Anfang von Abschnitt 1.3.2) gilt für Materie, die aus Teilchen der Ruhemasse m besteht, die Beziehung

$$e^{V_B - V} = \frac{p + \mu c^2}{\rho c^2}, \quad (1.14)$$

wobei ρ die Ruhemassendichte bezeichnet. Die Herleitung soll hier kurz skizziert werden.

Wir gehen von der GIBBSschen Fundamentalform

$$dU = T dS - p dV + \mu_c dN \quad (1.15)$$

aus. Hier bezeichnet V das Volumen einer hinreichend kleinen Zelle, in der man die thermodynamischen Zustandsgrößen als konstant ansehen kann. Dieses V ist nicht zu verwechseln mit der metrischen Funktion V aus (1.14), die erst im letzten Schritt dieser Herleitung wieder ins Spiel kommt. Weiterhin ist U die innere Energie inklusive der Ruhenergie. Die Abspaltung der Ruhenergie Nmc^2 würde sich lediglich in einem anderen chemischen Potential $\tilde{\mu}_c = \mu_c - mc^2$ äußern.

Wir gehen davon aus, daß U extensives thermodynamisches Potential bzgl. der extensiven Zustandsgrößen S , V und N ist. Dies ist beispielsweise für wechselwirkungsfreie Teilchen (ideales Gas) der Fall. Es gilt $U(\alpha S, \alpha V, \alpha N) = \alpha U(S, V, N)$. Daraus folgt (durch Differentiation nach α und Ersetzen der partiellen Ableitungen von U entsprechend des totalen Differentials (1.15))

$$U = TS - pV + \mu_c N. \quad (1.16)$$

Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ folgt aus dieser Gleichung mittels $U = \mu c^2 V$

$$\mu_c(T=0) = \frac{p + \mu c^2}{N} V.$$

Damit gehen wir in die GIBBSSchen Fundamentalform (1.15) für $T = 0$:

$$\begin{aligned} dU &= d\mu c^2 V + \mu c^2 dV = -p dV + (p + \mu c^2) V \frac{dN}{N} \\ \Leftrightarrow \quad d\mu c^2 &= (p + \mu c^2) \underbrace{\left(\frac{dN}{N} - \frac{dV}{V} \right)}_{= \frac{d\rho}{\rho}}, \end{aligned}$$

denn für Ruhemassendichte gilt $\rho = \frac{Nm}{V}$. Wir „teilen“ durch $d\rho$ und erhalten schließlich

$$c^2 \frac{d\mu}{d\rho} = \frac{p + \mu c^2}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu c^2 + p} = \frac{d}{d\rho} \ln \frac{p + \mu c^2}{\rho c^2}.$$

Integration beider Seiten nach p führt vermöge (1.7) auf die Behauptung (1.14). Dabei ist die Wahl derselben Integrationskonstante mit der Bedingung $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + \mu c^2}{\rho c^2} = 1$ verknüpft, welche für vernünftige Zustandsgleichungen erfüllt sein sollte.

1.3.1 Polytrope Sterne

Die einfachste Form der Zustandsgleichung ist eine polytrope Beziehung

$$\mu = K \frac{\rho^\Gamma}{\Gamma - 1} + \rho c^2, \quad p = K \rho^\Gamma, \quad \Gamma = 1 + \frac{1}{N}. \quad (1.17)$$

Darin ist auch als Grenzfall die Zustandsgleichung konstanter Massendichte $\mu = \mu_0$ enthalten, wenn man den Polytropenindex N gegen null gehen läßt.

Mittels (1.14) oder durch Integration von (1.7) bekommen wir eine explizite Gleichung zur Berechnung von ρ bzw. p aus der metrischen Funktion V :

$$e^{V_B - V} = \frac{p + \mu c^2}{\rho c^2} = (N + 1) \cdot K \cdot \rho^{\frac{1}{N}} + 1 = (N + 1) \cdot K^{\frac{N}{N+1}} \cdot p^{\frac{1}{N+1}} + 1.$$

In dieser Darstellung ist der Fall $N = 0$ (mit $\mu = 1$) sogar explizit enthalten.

1.3.2 Die CHANDRASEKHAR Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung mit konstanter Massendichte beschreibt einen Neutronenstern nur sehr ungenau. Es wird dabei von einer mittleren Dichte ausgegangen, die im Bereich der

Dichte eines Atomkerns liegt, also etwa $10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Ein exakter Wert läßt sich jedoch nicht angeben.

Dagegen enthält die Zustandsgleichung für ein relativistisches, vollständig entartetes ideales Neutronengas keinen freien Parameter.

Ideal heißt, daß die Wechselwirkung der Neutronen untereinander vernachlässigt wird. Vollständige Entartung bezieht sich auf Temperaturen dicht am absoluten Nullpunkt. Damit sind Temperaturen weit unterhalb der FERMI-Temperatur gemeint. Für Neutronen (bei einer mit Atomkernen vergleichbaren Dichte) beträgt die FERMI-Temperatur etwa 10^{13} K. Die (Anfangs-)Temperatur einer Supernova-Explosion wird auf etwa 10^{10} K geschätzt [25, Kap. 18]. D. h. bei Sternen sind Temperaturen unterhalb von 10^{10} K zu erwarten.

Obwohl sich die Zustandsgleichung exakt herleiten läßt, ist sie nur eine Näherung, da die gemachten Annahmen idealisiert sind.

Wir beschreiben das Neutronengas im thermodynamischen Gleichgewicht wiederum durch die GIBBSsche Fundamentalform (1.15) und (1.16):

$$dU = T dS - p dV + \mu_c dN, \quad U = TS - pV + \mu_c N.$$

Eine LEGENDRE-Transformation bzgl. $S \rightarrow T$ und $N \rightarrow \mu_c$ führt auf das großkanonische Potential

$$\mathcal{F}(T, V, \mu_c) = U - TS - \mu_c N = -pV.$$

Die Neutronen genügen einer FERMI-Verteilung, d. h. die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes $|a\rangle$ beträgt

$$n_a = f(E_a)$$

mit der FERMI-Funktion

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu_c}{kT}} + 1}.$$

Beachtet man $n_a = -\frac{\partial \mathcal{F}_a}{\partial \mu_c}$, so folgt

$$\mathcal{F}_a = -kT \ln \left(1 + e^{\frac{\mu_c - E_a}{kT}} \right).$$

In der Spin-Impuls-Darstellung hängt die Energie E_a nur vom Impuls q aber nicht von der Spineinstellung s_z ab:

$$E_a = E(q) = \sqrt{m_n^2 c^4 + q^2 c^2}.$$

Dieser Energiewert ist $(2s + 1)$ -fach entartet. Damit können wir \mathcal{F} und U berechnen:

$$\mathcal{F} = \sum_a \mathcal{F}_a = (2s + 1) \cdot (-kT) \cdot \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty d^3q \ln \left(1 + e^{\frac{\mu_c - E(q)}{kT}} \right)$$

und

$$U = \sum_a n_a E_a = (2s+1) \cdot \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty d^3q f(E(q)) E(q).$$

Unter Verwendung von $p = -\frac{\mathcal{F}}{V}$, $\mu c^2 = \frac{U}{V}$, $d^3q = 4\pi q^2 dq$ und $s = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\begin{aligned} p &= \frac{kT}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dq q^2 \ln \left(1 + e^{\frac{\mu_c - E(q)}{kT}} \right) \\ &= \frac{kT}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{q^3}{3} \ln \left(1 + e^{\frac{\mu_c - E(q)}{kT}} \right) \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dq \frac{q^3}{3} \frac{1}{1 + e^{\frac{\mu_c - E(q)}{kT}}} \cdot e^{\frac{\mu_c - E(q)}{kT}} \cdot \frac{-1}{kT} \cdot \frac{dE}{dq} \\ &= \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dq q^3 f(E(q)) \cdot \frac{dE}{dq} \end{aligned}$$

und

$$\mu = \frac{1}{c^2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dq q^2 f(E(q)) E(q).$$

Für kleine Temperaturen (vollständige Entartung) sind nur die niedrigsten Energieniveaus besetzt, die FERMI-Funktion wird zur Stufenfunktion:

$$f(E(q)) = \begin{cases} 1 & \text{für } q < q_F \\ 0 & \text{für } q > q_F \end{cases}, \quad \text{wobei } E(q_F) = \lim_{T \rightarrow 0} \mu_c.$$

Die Integration ist also nur bis zum FERMI-Impuls q_F auszuführen.

Nun lassen sich diese Integrale explizit lösen. Mit der dimensionslosen Integrationsvariablen $x_F = \frac{q_F}{m_n c}$ ergibt sich nach einer etwas längeren Rechnung die Zustandsgleichung in impliziter Form

$$\begin{aligned} \mu &= K_n c^3 \cdot \left((6x_F^3 + 3x_F) \sqrt{1 + x_F^2} - 3 \ln(x_F + \sqrt{1 + x_F^2}) \right) \\ p &= K_n c^5 \cdot \left((2x_F^3 - 3x_F) \sqrt{1 + x_F^2} + 3 \ln(x_F + \sqrt{1 + x_F^2}) \right) \\ K_n &= \frac{m_n^4}{24\pi^2 \hbar^3} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Auch für diese Gleichung läßt sich das Integral in (1.7) explizit lösen, wir gehen aber wieder den einfacheren Weg über (1.14). Dazu ist zunächst mittels der Teilchenzahl N die Ruhemassendichte ρ zu berechnen:

$$N = \sum_a n_a = (2s+1) \cdot \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty d^3q f(E(q)) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 4\pi \int_0^{q_F} q^2 dq = \frac{V q_F^3}{3\pi^2 \hbar^3},$$

also

$$\rho = \frac{Nm_n}{V} = 8K_n c^3 x_F^3.$$

Eingesetzt in (1.14) ergibt sich direkt

$$e^{V_B - V} = \frac{p + \mu c^2}{\rho c^2} = \frac{8K_n c^5 x_F^3 \sqrt{1 + x_F^2}}{8K_n c^5 x_F^3} = \sqrt{1 + x_F^2}.$$

Mit dieser Formel kann man aus gegebenem V (und V_B) zunächst x_F bestimmen und daraus mittels (1.18) die Größen μ und p berechnen.

1.3.3 Beliebige Zustandsgleichung

Zu gegebener Zustandsgleichung $\mu(p)$ ist anhand von Gleichung (1.7) die Funktion $V = V(p, V_B)$ zu bestimmen. Die Zustandsgleichung selbst könnte als Funktion oder aber in Form von tabellarischen Werten vorliegen. Im zweiten Fall muß man durch geeignete Interpolation (mit geeigneten Funktionen und Parametern, Splines oder CHEBYSHEV-Entwicklungen) die Zwischenwerte approximieren.

Die eigentlich Schwierigkeit besteht darin, das Integral

$$I(p) = \int_0^p \frac{\tilde{p}}{\mu(\tilde{p}) + \tilde{p}}$$

möglichst genau auszuwerten um dann die Umkehrfunktion zu bestimmen.

Das Problem ist, daß bei weichen Zustandsgleichungen der Nenner des Integranden für $p \rightarrow 0$ verschwindet. Falls μ langsamer als p gegen null geht (beispielsweise $\mu \sim p^{N/(N+1)}$ bei polytropen Zustandsgleichungen) ist das Integral trotzdem konvergent. Die numerische Integration bis an eine solche Polstelle ist zwar nicht einfach, aber möglich. Dazu muß man die Stützstellen im Bereich der kritischen Stelle immer dichter legen. Die meisten Algorithmen teilen das Integrationsgebiet adaptiv in Teilintervalle ein und integrieren in jedem dieser Intervalle mit einer bestimmten Zahl von Stützstellen. Bei einer solchen Annäherung an die kritische Stelle wird abgebrochen, wenn der Wert des Integrals in einem Teilintervall so klein ist, daß sich das Ergebnis im Rahmen der geforderten Genauigkeit nicht mehr ändert.

Am Beispiel der polytropen Zustandsgleichungen (wo man einen analytischen Vergleich hat) zeigte sich, daß selbst eine recht einfache Implementation die Integration bis nahezu Maschinengenauigkeit möglich macht. Dazu wurde das Integrationsgebiet $\tilde{p} \in [0, p]$ geometrisch in Teilintervalle $[a^k p, a^{k-1} p]$ zerlegt und das Integral in jedem Intervall nach der SIMPSON-Regel berechnet. Dazu waren mit $a \approx 0.1 \dots 0.2$ etwa 40 Intervalle mit je 2000 Stützstellen nötig. Durch Verwendung spektraler Integrationsroutinen sollte sich die Zahl der Stützstellen stark reduzieren lassen (30 bis 50).

Durch ein NEWTON-Verfahren läßt sich dann die Nullstelle von $J(p) = V - V_B - I(p)$ bestimmen, d. h. $p(V)$ bestimmen.

Beim AKM-Algorithmus ist es jedoch nicht möglich, an jedem Gitterpunkt das komplette Integrations-Verfahren durchzuführen, ohne die Rechenzeit wesentlich zu erhöhen. Daher empfiehlt es sich, die Funktion $p(V)$ im Vorhinein an speziellen Stützstellen auszuwerten und anschließend mit einer CHEBYSHEV-Interpolation zu arbeiten. Verwendet man im AKM-Verfahren die Entwicklungsordnung m , so kann man sich m^2 CHEBYSHEV-Koeffizienten für die Funktion $p(V)$ leisten, ohne die Zeitkomplexität zu erhöhen.

Insgesamt war es möglich, mit dem hier dargestellten Verfahren für polytrope Zustandsgleichungen, Genauigkeiten bis zu 12 Dezimalstellen zu erreichen. Eine gewisse Mindestgenauigkeit ist nötig, damit das Verfahren stabil arbeitet. Andererseits sind die Zustandsgleichungen selbst nicht sehr genau bekannt, so daß es kaum sinnvoll ist, übermäßig hohe Genauigkeiten anzustreben.

1.3.4 Modifikationen

Um die Konvergenzgeschwindigkeit bzw. die numerische Stabilität zu erhöhen, sind eine Reihe von Modifikationen des Verfahrens möglich.

Vor allem ist es sinnvoll, die Koordinatentransformationen und die Darstellung der metrischen Funktionen dem asymptotischen Verhalten anzupassen. Beispielsweise ist es so möglich, Sterne mit unendlichem Zentraldruck zu berechnen.

Zum anderen kann man Innen- und Außengebiet weiter unterteilen. Dies bietet sich bei komplizierten Topologien (Außengebiet von Ringen) und bei sich einschnürenden Konfigurationen an der Grenze zur Bildung eines Zweikörpersystems (zwei Innengebiete) an. Zur Approximation von realistischen Zustandsgleichungen besteht die Möglichkeit, den Stern in Schichten aufzuteilen und dort jeweils unterschiedliche Zustandsgleichungen zu verwenden. Die Schichtgrenzen liegen bei konstantem Druck (d. h. auch konstantem V). Im Abschnitt 2.2.2 werden wir sehen, daß die Zustandsgleichung bei verschwindendem Druck (Sternoberfläche) besonderen Bedingungen genügen muß, um eine rasche Konvergenz des AKM-Verfahrens zu gewährleisten. Dieser Umstand ist bei Wahl der Zustandsgleichung in der äußersten Schicht zu beachten.

KAPITEL 2

Numerische Resultate für sphäroidale Sterne

Gegenstand dieses Kapitels sind stationäre, axialsymmetrische, starr rotierende Sterne mit unterschiedlichen Zustandsgleichungen. Wir richten unser Augenmerk dabei auf polytrope Zustandsgleichungen sowie das CHANDRASEKHAR-Modell.

Zunächst werden die wichtigsten Ergebnisse überblicksmäßig dargestellt. Anschließend wird das Konvergenzverhalten des AKM-Verfahrens in Abhängigkeit von der Zustandsgleichung analysiert.

2.1 Untersuchungen zu verschiedenen Zustandsgleichungen

Die polytrope Zustandsgleichung (1.17) enthält neben dem Polytropenindex N noch eine freie Konstante K . Diese läßt sich jedoch durch eine Reskalierung der physikalischen Größen auf Eins normieren. Dazu führen wir die dimensionslosen Größen (beachte $c = G = 1$)

$$\begin{aligned}\bar{p} &= K^N p, & \bar{\rho} &= K^N \rho, & \bar{\mu} &= K^N \mu, \\ \bar{M} &= K^{-N/2} M, & \bar{J} &= K^{-N} J, & \bar{r} &= K^{-N/2} r, & \bar{\Omega} &= K^{N/2} \Omega\end{aligned}$$

ein. (1.17) lautet damit

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{p}^\Gamma}{\Gamma - 1} + \bar{\rho}, \quad \bar{p} = \bar{\rho}^\Gamma, \quad \Gamma = 1 + \frac{1}{N}. \quad (2.1)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit rechnen wir ausschließlich mit solchen dimensionslosen Größen und lassen aber den Balken wieder weg.¹

Die CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung enthält nur die Neutronenmasse als Parameter, welche sehr genau bekannt ist. Dennoch empfiehlt es sich auch hier zu dimensionslosen Größen überzugehen. Dazu muß man die Konstante K_n in (1.18) normieren. Für $p \rightarrow 0$ kann man die impliziten Gleichungen nach x_F entwickeln:

$$\mu = K_n \cdot 8x_F^3 \quad p = K_n \cdot \frac{8}{5}x_F^5 \quad \Rightarrow \quad \mu = 5^{3/5} \cdot 8^{2/5} \cdot K_n^{2/5} p^{3/5}.$$

¹Äquivalent dazu ist es, $K = 1$ zu setzen, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist.

\hbar	1 km	1 ms	1 Pa	$M_\odot = 1.9889 \times 10^{30} \text{ kg}$
$1.3244 \cdot 10^{-77}$	0.2252	67.50	$1.630 \cdot 10^{-37}$	0.3326

Tabelle 2.1: Dimensionslose Größen für Sterne mit CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung.

Dies entspricht aber genau dem Grenzfall $p \rightarrow 0$ der dimensionslosen polytropen Zustandsgleichung mit $N = \frac{3}{2}$ (da $\mu = \frac{3}{2}p + p^{3/5} \rightarrow p^{3/5}$), wenn man

$$K_n = \frac{1}{8} \cdot 5^{-3/2} \approx 0.0111803$$

setzt. Wegen $K_n = m_n^4 / (24\pi^2 \hbar^3)$ lassen sich damit alle physikalischen Einheiten dimensionslos ausdrücken, siehe Tabelle 2.1.

2.1.1 Masse-Zentraldruck-Relation

Die innere SCHWARZSCHILD-Lösung für homogene Sterne hat die Eigenschaft, daß mit zunehmender Masse der Druck im Sterninneren steigt. Im Zentrum, wo der Druck am größten ist, erreicht er für $M \rightarrow \frac{9}{4}(3\pi\mu_0)^{-1/2}$ den Wert unendlich. Jedoch sind keine physikalischen Mechanismen vorstellbar, unter denen Materie unendlichen Druck aushalten würde, stattdessen müßte der Stern von innen her kollabieren. Diese physikalische Grenze gibt damit eine Massengrenze vor.

Im axialsymmetrischen Fall, ist die Lösungsschar zweidimensional, und die Sterne mit unendlichem Zentraldruck bilden eine Sequenz. Typischerweise wächst die maximal mögliche Masse mit zunehmender Rotation. Andererseits kann man die Winkelgeschwindigkeit nicht beliebig erhöhen. Wird die Rotationsgeschwindigkeit so groß, daß die Trägheitskräfte größer werden als die gravitativen Anziehungskräfte, würde sich Materie von der Oberfläche ablösen (sogenannte Mass-shedding-Grenze). Zuerst tritt dieser Effekt natürlich am Äquator auf. Dabei bildet die Oberfläche eine Spitze aus, was nur bei Abwesenheit eines Druckgradienten möglich ist. Zur Charakterisierung der Stärke dieser Spitze definieren wir uns den Mass-shedding-Parameter

$$\beta = -\frac{\rho_0^2}{\zeta_0^2} \frac{d(\zeta_B^2)}{d(\rho^2)} \Big|_{\rho=\rho_0} = -\frac{\rho_0}{\zeta_0^2} \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \zeta_B \frac{d\zeta_B}{d\rho}. \quad (2.2)$$

Dabei sind $\zeta_B(\rho)$ die Sternoberfläche, ρ_0 der äquatoriale und $\zeta_0 = \zeta_B(0)$ der polare Radius. Für elliptische Querschnitte ist $\beta = 1$. Dies gilt beispielsweise für die NEWTONschen MACLAURIN-Ellipsoide und nichtrotierende Sterne (SCHWARZSCHILD-Sequenz). An der Mass-shedding-Grenze ist $\beta = 0$. Durch eine solche Vorgabe läßt sich dieser Grenzfall mit dem AKM-Programm exakt einstellen.

In Abbildung 2.1 sind die Masse-Radius-Relationen für Sterne mit polytropen Zustandsgleichungen dargestellt. Dort sind die Sequenzen für nichtrotierende Sterne (statisch) und maximal rotierende Sterne (mass shed) eingezeichnet.

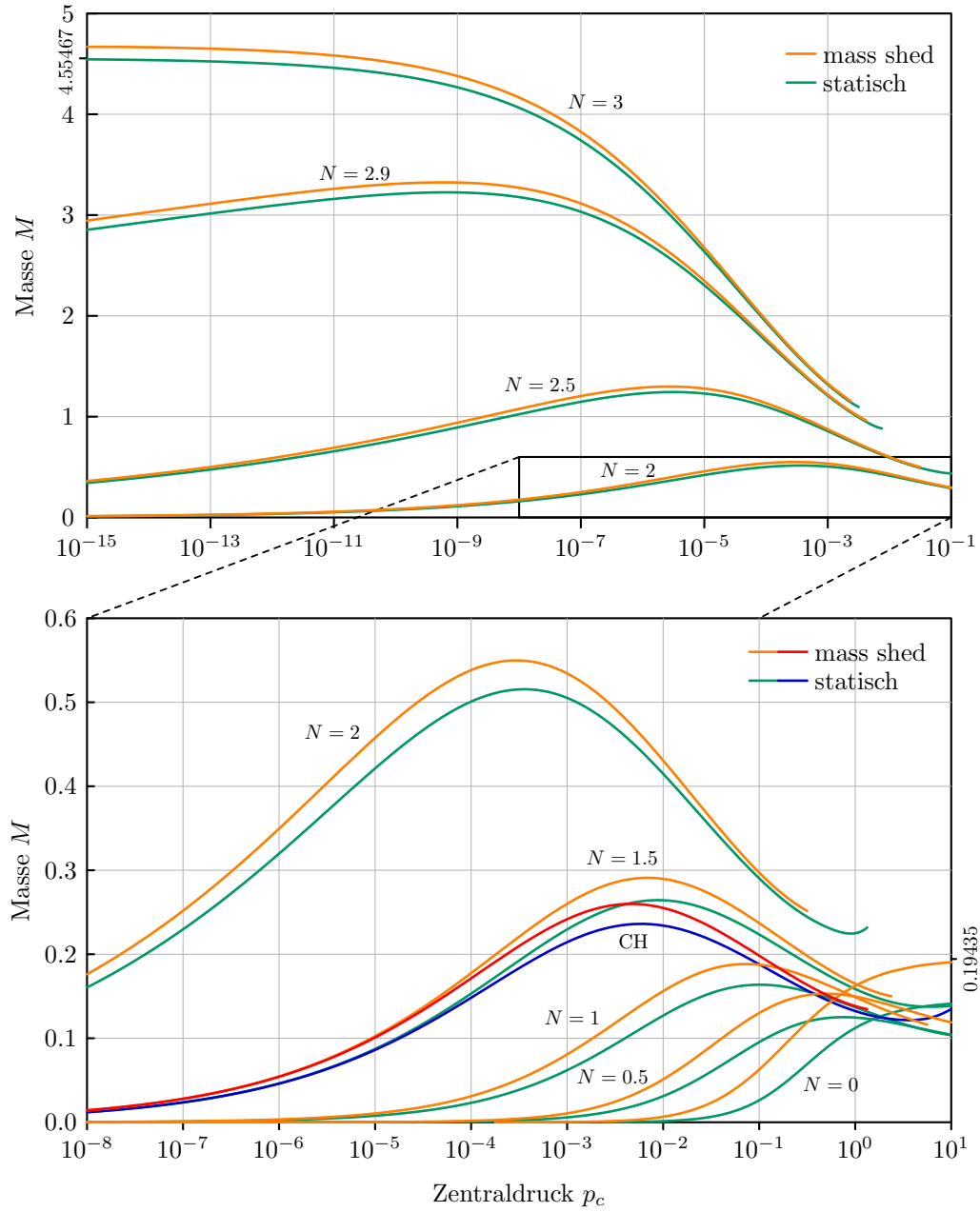


Abbildung 2.1: Masse-Zentraldruck-Relationen für Sterne mit dimensionsloser polytroper Zustandsgleichungen im nichtrotierenden (statisch) und maximal rotierenden (mass shed) Fall. CH=CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung (vollständig entartetes, ideales Neutronengas). Einheiten (nur für CH): $1 \text{ Pa} = 1.63 \cdot 10^{-37}$, $M_\odot = 0.333$, vgl. Tabelle 2.1.

Für Polytropenindizes $N > 0$ zeigt sich, daß die Masse nicht monoton mit dem Druck an-

steigt, stattdessen fällt sie nach dem Erreichen eines Maximums wieder. Dieses Verhalten, die maximale Masse bei endlichem Druck zu erreichen, ist typisch für weiche Zustandsgleichungen. Obwohl die Relationen mit unterschiedlichem Polytropenindex – wegen der willkürlichen Normierung auf dimensionslose Größen – nicht absolut vergleichbar sind, ist die Tendenz zu erkennen, daß sich das Masse-Maximum zu immer niedrigeren Zentraldrücken verschiebt. Während das Maximum für $N = 0$ bei unendlichem Zentraldruck erreicht wird, wird die Masse für $N = 3$ im NEWTON-Grenzfall ($p \rightarrow 0$) maximal. Der sich hier im statischen Fall ergebende Wert von $M \approx 4.55467$ deckt sich mit der Lösung der LANE-EMDEN-Gleichung. Diese Gleichung dient zur Berechnung NEWTONscher Sterne mit polytroper Zustandsgleichung $p = \rho^\Gamma$, $\Gamma = 1 + \frac{1}{N}$ und lautet:

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) + \omega^N = 0, \quad \omega(0) = 1, \quad \left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=0} = 0.$$

z_N sei die erste Nullstelle der Lösung, d. h. $\omega(z_N) = 0$ und R der Radius des Sterns. Dann berechnet sich die Masse gemäß

$$M = 4\pi \left(-\frac{1}{z} \frac{d\omega}{dz} \right)_{z=z_N} \left(\frac{(N+1)z_N^2}{4\pi} \right)^{\frac{N}{N+1}} R^{\frac{N-3}{N-1}}, \quad (2.3)$$

wobei R der Radius des Sterns ist. Für $N = 3$ hängt die Masse jedoch nicht von R ab. Das mit einem Computeralgebrasystem bestimmte numerische Ergebnis lautet

$$M = 4.5546708027 \dots$$

2.1.2 Masse-Radius-Relation

Häufig werden Sterne auch anhand der Masse-Radius-Abhängigkeit diskutiert. Während die Masse durch die Fernfeld-Asymptotik klar definiert ist, ist der Radius aufgrund der Raumkrümmung nicht eindeutig definiert. Das Verhältnis von wahren Umfang und wahrer radialer Entfernung zwischen Peripherie und Mittelpunkt eines Kreises ist ungleich 2π (in unserem Fall kleiner).

Wir werden als Radius den Umfangsradius, d. h. wahrer Umfang geteilt durch 2π , verwenden:

$$R_{\text{circ}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho = \rho_0, \zeta = 0)} d\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho = \rho_0, \zeta = 0)}.$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist das genau der klassische Radius.

Die Masse-Radius-Relationen sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Für $N = 1$ ergibt sich im NEWTONschen Grenzfall ein endlicher Radius. In der NEWTONschen Theorie ist nämlich der Radius eines nichtrotierenden Sterns unabhängig von der Masse. Aus (2.3) ergibt sich (durch Potenzieren mit $N - 1$ und anschließender Grenzwertbildung $N \rightarrow 1$) unter Verwendung von $\omega(z) = \sin(z)/z$ der Radius $R = \sqrt{\pi/2}$.

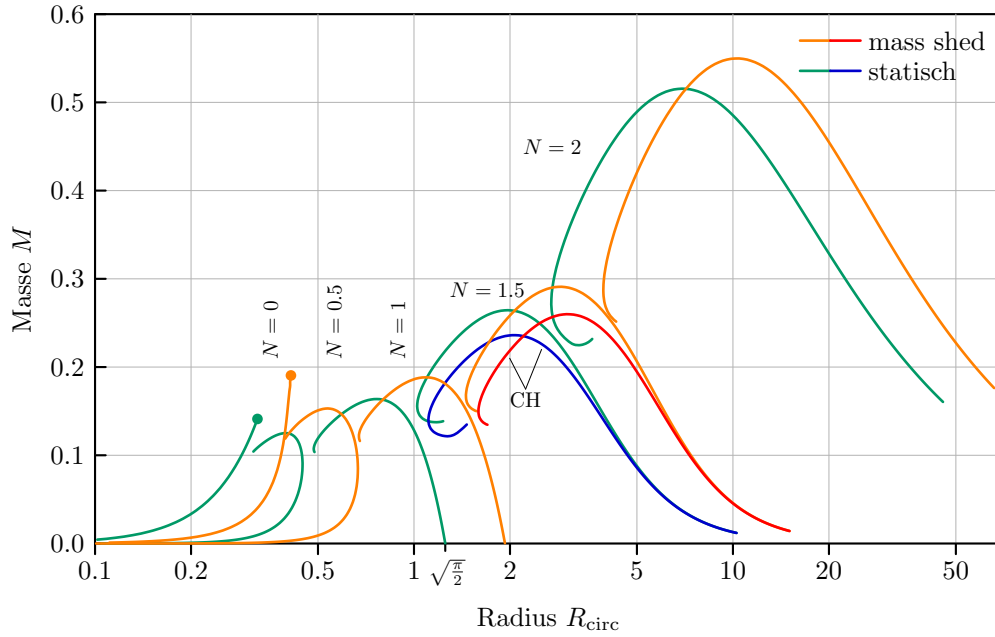


Abbildung 2.2: Masse-Radius-Relationen, vgl. Abbildung 2.1. Einheiten für CH: $1 \text{ km} = 0.225$, $M_{\odot} = 0.333$.

In Abbildung 2.2 sind die Abhängigkeiten soweit eingezeichnet, wie sie mit dem Programm mit akzeptablen Aufwand und hinreichender Genauigkeit auszurechnen sind. Für $p \rightarrow \infty$ oder $M \rightarrow 0$ divergieren verschiedene Terme, z. B. die Sternradien oder einzelne metrische Funktionen. Im homogenen Fall ($N = 0$) kann man jedoch einen normierten Druck $\tilde{p} = p/(1 + p)$ und solche Potentiale einführen², so daß alle in den Feldgleichungen vorkommenden Terme endlich bleiben. Entsprechend lassen sich die Endpunkte der Masse-Radius-Relationen genau bestimmen.

Bei den anderen Zustandsgleichungen ist immerhin der physikalisch relevante Teil zugänglich, insbesondere der Bereich maximaler Masse.

2.1.3 Maximale Masse

Aus astrophysikalischer und astronomischer Sicht spielt vor allem die Masse von kosmischen Objekte eine wichtige Rolle. Insbesondere geht es um die Frage nach der maximal möglichen Masse verschiedener Sternmodelle und deren Vergleich mit astronomischen Beobachtungen.

Kugelsymmetrische Sterne beliebiger Zustandsgleichung werden durch die TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF-Gleichung beschrieben. Die numerische Lösung dieser gewöhnli-

²Es werden e^V , ae^V und $\frac{W}{p}e^{-V}$ verwendet, vgl. Kapitel 3.

N	M_{statisch}	$M_{\text{mass-shed}}$	Zunahme durch Rotation
0	0.145 ^a	0.194 ^b	34.2 %
0.5	0.125	0.153	22.4 %
1	0.164	0.189	15.2 %
1.5	0.264	0.291	10.2 %
2	0.515	0.550	6.80 %
2.5	1.244	1.298	4.34 %
2.9	3.225	3.324	3.07 %
3 ^c	4.555	4.648	2.84 %
CH	0.236	0.260	10.23 %

Tabelle 2.2: Relative Zunahme der Maximalmasse durch Berücksichtigung der Rotation.

^a Grenzmasse der SCHWARZSCHILD-Lösung bei unendlichem Zentraldruck: $M = \frac{4}{9} \cdot (3\pi)^{-\frac{1}{2}}$.

^b Grenzmasse für rotierende homogene Sterne (siehe [23]): $M = 0.19435$.

^c Für $N = 3$ wurden die Massen nach $p_c = 0$ extrapoliert. Im statischen Fall deckt sich dieser Wert mit der Masse $M = 4.55467$, die man aus der LANE-EMDEN-Gleichung erhält.

chen Differentialgleichung gestaltet sich recht einfach, wobei die im Kapitel 1 vorgestellte spektrale Methode eine gute Alternative zu herkömmlichen RUNGE-KUTTA-Verfahren ist.

Wenn man zusätzlich noch Rotation und Magnetfelder berücksichtigt, liegt die maximal mögliche Masse etwas höher. Als Teil dieser Arbeit wurde der Einfluß der Rotation auf diese Grenzmasse für polytrope Zustandsgleichungen untersucht. Tabelle 2.2 stellt die Ergebnisse zusammen, vgl. auch Abbildung 2.2 und Abbildung 2.1. Für das CHANDRASEKHAR-Modell lauten die Grenzmassen in Sonnenmassen ausgedrückt (vgl. Tabelle 2.1) $M_{\text{statisch}} = 0.710M_{\odot}$ und $M_{\text{mass-shed}} = 0.781M_{\odot}$. Der Wert für den nichtrotierenden Fall wurde schon 1939 von OPPENHEIMER und VOLKOV angegeben [19].

Grundsätzlich zeigt sich die Tendenz, daß bei weicheren Zustandsgleichungen der Masse-Unterschied zwischen nichtrotierenden und maximal rotierenden Sternen kleiner ist als bei harten Zustandsgleichungen. Das liegt daran, daß sich mit wachsendem Polytropenindex im äußeren Bereich des Sterns eine immer dicker werdende Schicht sehr geringer Dichte ausbildet, der Hauptteil der Masse aber in einem kleineren Kern konzentriert ist, vgl. Abbildung 2.3. Wegen der starren Rotation erreicht der Stern am Äquator schnell die Mass-shedding-Grenze, während sich der Kern vergleichsweise langsam dreht.

In bezug darauf ist ein solches Modell mit starrer Rotation und Beschreibung des Sternoberflächenbereiches durch eine polytrope Zustandsgleichung nicht sehr realistisch.

2.1.4 Der CHANDRASEKHAR-Stern maximaler Masse

Wie eingangs dieses Kapitels aufgezeigt, verhält sich die CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung bei kleinen Drücken wie eine polytrope Relation mit $N = 3/2$. Diese Asymptotik ist

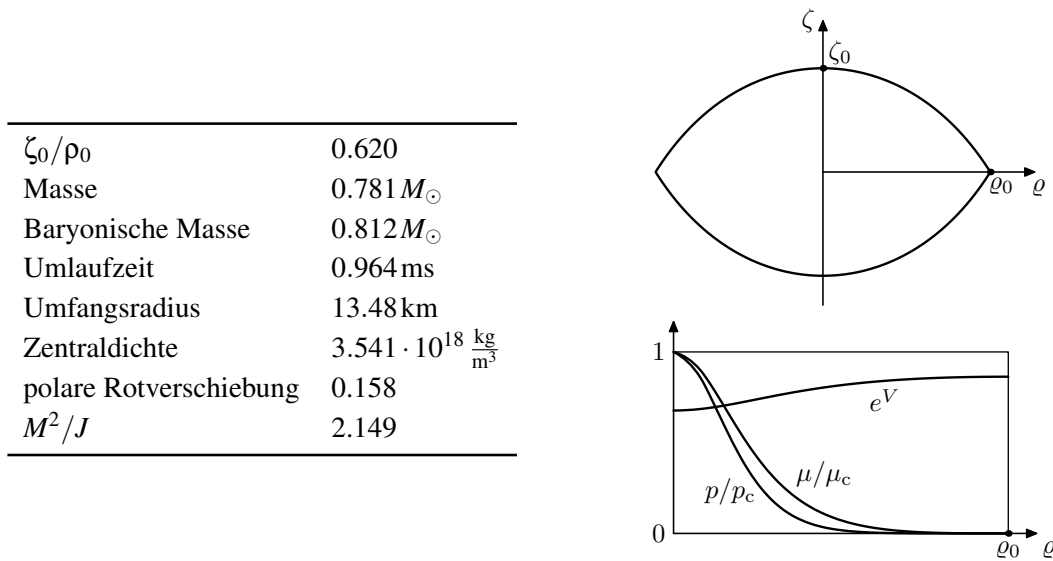


Abbildung 2.3: Der Stern maximaler Masse mit CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung. Rechts oben: Querschnitt, rechts unten: charakteristische Größen in der Äquatorebene (μ_c , p_c ... Dichte und Druck im Zentrum).

in den Abbildungen 2.2 und 2.1 gut zu sehen.

Der Stern maximaler Masse befindet sich auf der Mass-shedding-Kurve bei einer Zentraldichte von etwa $3.5 \cdot 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, die etwa der Dichte im Inneren eines Atomkerns entspricht. Nach außen klingen Druck und Dichte stark ab, es bildet sich im Bereich der Oberfläche eine relativ dicke Schicht geringer Dichte aus. Die Masse von etwa 0.78 Sonnenmassen ist ca. 10% höher als die maximale Masse im nichtrotierenden Fall.

2.2 Konvergenzuntersuchungen

2.2.1 Verifikation der Lösung

In der Numerik ist es besonders wichtig, die erhaltenen Ergebnisse von Computerprogrammen sehr genau zu überprüfen. Zum einen können Fehler bei der Modellierung des Problems und Implementation des Codes auftreten. Zum anderen treten oft überraschende numerische Phänomene auf, deren Ursachen teilweise schwer zu finden sind. Deshalb empfiehlt es sich die Resultate durch mehrere unabhängige Tests zu verifizieren. Beim AKM-Verfahren bieten sich dazu folgende Möglichkeiten an:

- (a) Vergleich mit bekannten Grenzfällen

Zu manchen Konfigurationen, z. B. SCHWARZSCHILD-Sequenz oder NEWTONscher

Grenzfall (MACLAURIN-Sequenz), lassen sich zumindest im homogenen Fall analytische Lösungen angeben.

Solche Lösungen können damit praktisch exakt überprüft werden. In den hier vorgestellten relativistischen Versionen des AKM-Verfahrens lassen sich NEWTONsche Sterne nicht exakt berechnen,³ man kann aber durchaus das Verhalten bei $M \rightarrow 0$ studieren.⁴

(b) Vergleich mit anderen Verfahren

Sowohl für Grenzfälle als auch im allgemeinen existieren andere, mehr oder weniger gute numerische Verfahren zur Berechnung von Sternmodellen ([14], [20], [28]).

Die Verfahren unterscheiden sich bzgl. der erreichbaren Genauigkeit, der möglichen Behandlung von Grenzfällen und unterschiedlichen Zustandsgleichungen, sowie im Rechenaufwand.

(c) Konvergenzverhalten

Bei Erhöhung der Entwicklungsordnung m (Anzahl der CHEBYSHEV-Koeffizienten) konvergieren charakteristische Werte gegen den Wert der exakten Lösung. Zu diesen Größen zählen beispielsweise Masse, Drehimpuls, Exzentrizität, Oberflächenform usw.

Bei zunehmendem m sollten sich bei diesen Werten immer mehr Stellen stabil einstellen. Ebenfalls ist es möglich, aus solchen m -Sequenzen geeignet nach $m = \infty$ zu extrapolieren.

(d) Identitäten

Manche Größen lassen sich auf verschiedene Weisen aus der gefundenen Lösung berechnen. Beispielsweise kann man die gravitierende Masse durch ein Integral über das Sterninnere bestimmen oder im Fernfeld ablesen⁵.

Die Äquivalenz der verschiedenen Berechnungswege dieser Identitäten beruht essentiell auf den Feldgleichungen. Auch wenn der Schluß mathematisch nicht exakt ist, ist eine hohe Übereinstimmung dieser Werte ein brauchbares Indiz dafür, daß die Feldgleichungen gut erfüllt sind.

An dieser Stelle sollen die verwendeten Identitäten kurz angegeben werden (Details dazu siehe [29], [4], [23]). Da wir die Formeln gleich für den axialsymmetrischen Fall angeben wollen, müssen wir einige Bezeichnungen aus Kapitel 3 vorwegnehmen. Wir verwenden

³Es existieren aber analoge Programme auf Basis der NEWTONschen Feldgleichungen zur Berechnung solcher nichtrelativistischer Lösungen.

⁴Nur im Grenzfall $M \rightarrow 0$ sind Relativitätstheorie und NEWTONsche Theorie vereinbar. Jedoch ist die NEWTONsche Theorie aufgrund der Linearität ihrer Feldgleichungen skaleninvariant, so daß der Grenzübergang $M \rightarrow 0$ nur im relativistischen Fall von Bedeutung ist.

⁵Aufgrund der Kompaktifizierung des Raumes ist der zweite Weg besonders einfach und genau durchführbar.

dort Zylinderkoordinaten (ρ, ζ, ϕ) und vier metrische Funktionen (k, V, a, W) im Innengebiet bzw. (κ, v, ω, W) im Außengebiet, die ihrerseits jeweils nur von ρ und ζ abhängen.

Masse und Drehimpuls sind in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht ohne weiteres definierbar. Jedoch kann man dies beim Vorhandensein gewisser Symmetrien, wie in unserem Fall Stationarität und Axialsymmetrie, in einfacher Weise tun. Die Symmetrien korrespondieren mit KILLING-Vektorfeldern ξ (Stationarität) und ϕ (Axialsymmetrie). Man definiert nun Masse und Drehimpuls als diesen KILLING-Feldern zugeordnete Erhaltungsgrößen:⁶

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \quad \text{und} \quad J = \frac{1}{16\pi} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d.$$

Diese Integrale von 2-Formen über eine zweidimensionale, den Stern umschließende Fläche S sind unabhängig von der konkreten Wahl von S . Mittels des STOKESSchen Satzes lassen sich diese Integrale in Volumenintegrale über das Sterninnere umwandeln. In LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten lauten diese Formeln dann

$$\begin{aligned} J &= 2\pi \int (\mu + p) a W e^{2(k-V)} d\rho d\zeta \\ M &= 2\Omega J + 2\pi \int (\mu + 3p) W e^{2(k-V)} d\rho d\zeta \\ M_0 &= 2\pi \int \rho W e^{2k-3V} d\rho d\zeta. \end{aligned}$$

Der Term $2\Omega J$ entsteht durch den Übergang in das mitrotierende Bezugssystem. M_0 ist die baryonische Masse, wobei $\rho = (\mu + p) \exp(V - V_B)$ die Ruhemassendichte ist, siehe Gleichung (1.14). $M_0 - M$ ist die Bindungsenergie.

Da die Lösungen asymptotisch flach sind, sind Masse und Drehimpuls auch aus dem Fernfeld bestimmbar. Es gilt

$$M = -\lim_{r \rightarrow \infty} r v \quad \text{und} \quad J = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 \omega.$$

Dabei ist $r^2 = \rho^2 + \zeta^2$ und die angegebenen Grenzwerte sind richtungsunabhängig.

Um die entsprechenden Masse-Formeln für den kugelsymmetrischen Fall zu bekommen, müssen wir das Volumenelement invariant ersetzen. Für die Determinante g der verwendeten Metriken gilt $\sqrt{-g} = W e^{2(k-V)} \rightarrow e^V \sqrt{A}$, also

$$2\pi \int \rho d\rho d\zeta W e^{2k-2V} \dots \rightarrow 4\pi \int r^2 dr e^V \sqrt{A} \dots$$

Weiterhin wurden zwei relativistische Verallgemeinerungen des klassischen Virialsatzes gefunden ([9], [13]). Die dort hergeleiteten Virialidentitäten (general-relativistic virial identities) lauten in LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten mit den Abkürzungen $u = -a e^{2V}/W$ und $e^\eta = W e^{-v}/\rho$:

⁶Da die Orbits des KILLING-Feldes ξ nicht geschlossen sind, ist eine solche Definition der Masse nur in asymptotisch flachen Raumzeiten möglich. Für den Drehimpuls J muß man dies nicht fordern.

$$\begin{aligned}
GRV3 &= |1 - I_1/I_2|, \quad I_1 = 4\pi \int_{(\text{int})} \left(3p\sqrt{1-u^2} + \frac{(\mu+p)u^2}{\sqrt{1-u^2}} \right) W e^{2k-3v} d\rho d\zeta, \\
I_2 &= 4\pi \int_{(\text{ext})} \left(\rho \left((\nabla v)^2 - \frac{\nabla(\kappa-v)\nabla\eta}{2} - \frac{3W^2(\nabla\omega)^2}{8e^{4v}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - e^{2(\kappa-v-\eta)} \right) \left(\frac{\kappa|_\rho - v|_\rho}{2} - \frac{\eta|_\rho}{4} \right) \right) e^\eta d\rho d\zeta, \\
GRV2 &= |1 - J_1/J_2|, \quad J_1 = 8\pi \int_{(\text{int})} \left(p + \frac{(\mu+p)u^2}{1-u^2} \right) e^{2(k-v)} d\rho d\zeta, \\
J_2 &= 4\pi \int_{(\text{ext})} \left((\nabla v)^2 - \frac{3W^2(\nabla\omega)^2}{4e^{2v}} \right) d\rho d\zeta.
\end{aligned}$$

Sind die EINSTEINSchen Feldgleichungen exakt erfüllt, gilt $I_1 = I_2$ und $J_1 = J_2$, also $GRV3 = GRV2 = 0$. Zur Verifikation numerischer Lösungen läßt sich die Größe von $GRV3$ und $GRV2$ heranziehen. In manchen den Anwendungen des AKM-Verfahrens wurden hierfür Werte bis zu 10^{-14} erreicht.

2.2.2 Abhängigkeit von der Zustandsgleichung

Damit die metrischen Funktionen, sowie Druck- und Dichteverlauf und deren Ableitungen gut durch CHEBYSHEV-Polynome approximiert werden können, müssen diese Funktionen analytisch sein. Entsprechend müssen auch die Funktionen $p = p(V)$ und $\mu = \mu(V)$ analytisch sein. Besonders problematisch ist dies im Bereich der Sternoberfläche. Nach (3.10) gilt

$$V_B - V = \int_0^p \frac{d\tilde{p}}{\mu(\tilde{p}) + \tilde{p}}.$$

Damit das Integral nicht divergiert, muß $\mu(p)$ für $p \rightarrow 0$ langsamer als p fallen.⁷ Wir schreiben $\mu(p) = p^{1-\alpha} \cdot f(p)$, wobei $\alpha > 0$ und $f(0) > 0$. Dann folgt im Limes $p \rightarrow 0$

$$V_B - V \approx \int_0^p \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^{1-\alpha} \cdot f(\tilde{p})} \approx \frac{1}{f(0)} \int_0^p \tilde{p}^{\alpha-1} d\tilde{p} = \frac{1}{\alpha \cdot f(0)} p^\alpha.$$

⁷Zumindest bei weichen Zustandsgleichungen verschwindet mit dem Druck p auch die Dichte μ .

Entsprechend folgt

$$p = ((V_B - V)\alpha f(0))^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Die Funktion $p(V)$ ist also genau dann (bei $p = 0$) analytisch, wenn $\frac{1}{\alpha}$ eine positive ganze Zahl ist, also $\frac{1}{\alpha} = N + 1$. Folglich haben wir die notwendige Bedingung

$$\mu(p) = p^{\frac{N}{N+1}} \cdot f(p), \quad N \in \mathbb{N}, \quad f(0) > 0.$$

Damit auch $\mu(V)$ analytisch wird, bekommen wir eine Bedingung an die Funktion $f(p)$. Es gilt im Limes $p \rightarrow 0$

$$\mu(V) = p(V)^{\frac{N}{N+1}} \cdot f(p(V)) = \left(\frac{(V_B - V)f(0)}{N+1} \right)^N \cdot f \left(\left(\frac{(V_B - V)f(0)}{N+1} \right)^{N+1} \right).$$

Diese Funktion ist genau dann analytisch in V , wenn $f(x^{N+1})$ analytisch in x ist. Führen wir dafür eine neue Funktion g ein, d. h. $g(x) = f(x^{N+1})$, haben wir für die Zustandsgleichung die Bedingung

$$\boxed{\mu(p) = p^{\frac{N}{N+1}} \cdot g(p^{1/(N+1)}), \quad N \in \mathbb{N}, \quad g(0) > 0,} \quad (2.4)$$

wobei die Funktion g bei verschwindendem Argument analytisch sein muß.

Für polytrope Zustandsgleichungen (1.17)

$$\mu(p) = Np + p^{\frac{N}{N+1}} = p^{\frac{N}{N+1}} \left(1 + p^{\frac{1}{N+1}} \right)$$

ist diese Bedingung genau für ganzzahlige Polytropenindizes N erfüllt.

2.2.3 Experimentelle Erfahrungen

Zunächst wurde das Konvergenzverhalten für den eindimensionalen kugelsymmetrischen Fall untersucht, da man aufgrund des geringen Rechenaufwands zu sehr hohen Entwicklungsordnungen gehen kann. Gleichzeitig ist es möglich, mit vierfacher Genauigkeit (128Bit, ca. 33 Dezimalstellen) zu arbeiten. Dies geschieht jedoch auf Basis einer Emulation, da heutige PC-Prozessoren nur mit 64 bis 80 Bit rechnen können. Alternativ kann man den Algorithmus (Abbildung 1.1) auch in einem Computeralgebrasystem implementieren und somit beliebige (vorzugebende) Genauigkeit erreichen.

Abbildung 2.4 zeigt das Konvergenzverhalten für verschiedene Polytropenindizes N in Abhängigkeit von der Entwicklungsordnung m , d. h. der Zahl der verwendeten CHEBYSHEV-Koeffizienten. Als Maß für die Genauigkeit dient die Differenz zwischen M_i und M_e (im Innenraum und aus dem Fernfeld berechnete Massen). Für Drehimpuls und Virialidentitäten ergeben sich ganz ähnliche Zusammenhänge. Klar zu erkennen ist, daß für ganzzahlige N eine exponentielle Konvergenz vorliegt und Maschinengenauigkeit erreicht werden kann.

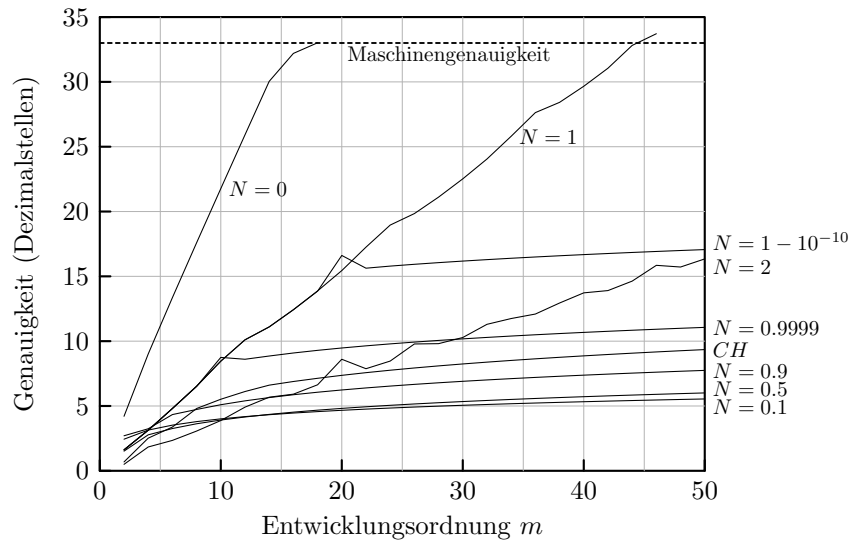


Abbildung 2.4: Konvergenz des AKM-Verfahrens bei verschiedenen Zustandsgleichungen (kugelsymmetrische Sterne mit Zentraldruck $p_c = 0.01$).

Bei nichtganzzahligen Polytropenindizes N , wie auch bei der CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung ist die Konvergenz – wie erwartet – viel langsamer. Wenn N sehr knapp neben einer ganzen Zahl liegt, konvergiert die Lösung zunächst auch recht gut, jedoch verlangsamt sich die Konvergenzgeschwindigkeit recht bald.

Abbildung 2.5 (oben) zeigt dieses Verhalten, aufgetragen über dem Polytropenindex N (bei einer Schrittweite von 0.1). Die Spitzen bei ganzzahligem N sind in Wirklichkeit sehr viel schmaler, wenn man mit kleineren Schrittweiten rechnen würde, vgl. Abbildung 2.4. Jedoch würde man dann in der Abbildung kaum noch etwas erkennen. Weiterhin ist es wichtig zu erwähnen, daß die Konfigurationen mit stark verschiedener Zustandsgleichung nur bedingt vergleichbar sind, da aus der gesamten Lösungsschar jeweils nur ein Repräsentant ausgewählt wurde. Ausgewählt wurden Sterne in der Nähe des Massenmaximums, was natürlich bei $N = 0$ und $N = 3$ nur näherungsweise realisiert werden konnte. Dementsprechend ist der vermeintliche Trend, daß das Verfahren für große N besser konvergiert darauf zurückzuführen, daß die ausgewählten Sterne für kleine N stark relativistisch und für große N fast NEWTONsch sind.

Wenden wir uns nun den axialsymmetrischen Sternen zu. Aufgrund des Rechenaufwandes stehen uns ohnehin nur 16 Dezimalstellen (doppelte Genauigkeit) zu Verfügung. Auch hier zeigt sich ziemlich genau dasselbe Konvergenzverhalten (Abbildung 2.5 unten). Als Vertreter wurden ebenfalls Sterne in der Nähe der Maximalmasse gewählt und zusätzlich der Mass-shedding-Parameter (vgl. (2.2)) auf $\beta = 0.9$ fixiert. Dies entspricht Radienverhältnissen zwischen 0.8 und 0.85, also nicht sehr stark rotierenden Sternen.

An der Mass-shedding-Grenze ($\beta = 0$) ist ohnehin keine sehr gute Konvergenz zu erwarten,

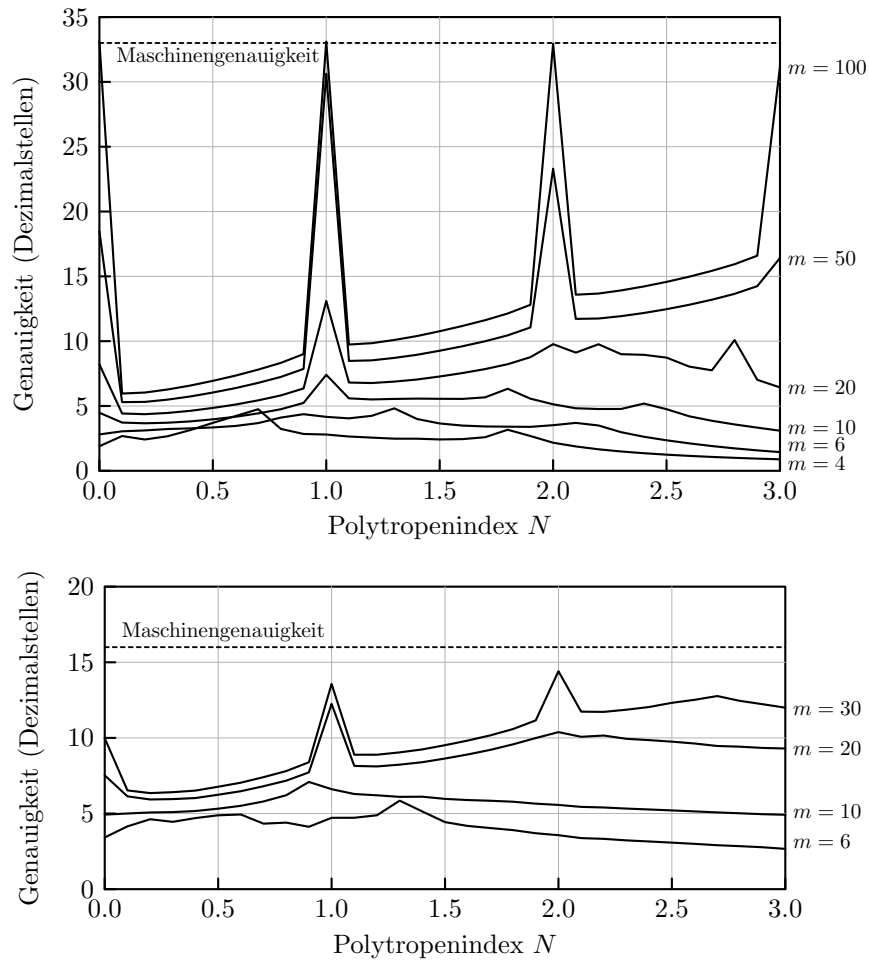


Abbildung 2.5: Konvergenz des AKM-Verfahrens bei polytropen Zustandsgleichungen. Oben: Kugelsymmetrische Sterne im Bereich maximaler Masse. Die Schrittweite bzgl. N beträgt 0.1, so daß die Spitzen bei ganzzahligem N in Wirklichkeit sehr viel schärfer sind. Unten: Dasselbe für axialsymmetrische Sterne mit $\beta = 0.9$.

da sich durch die Spitze der Oberfläche am Äquator weitere nichtanalytische Abhängigkeiten ergeben. Dennoch liefert das Verfahren mit bis zu 10 signifikanten Stellen sehr genaue Ergebnisse (Abbildung 2.6). Exemplarisch sind für diesen Fall auch die anderen Identitäten angegeben, die zusammen ein konsistentes Bild des Konvergenzverhaltens aufzeigen.

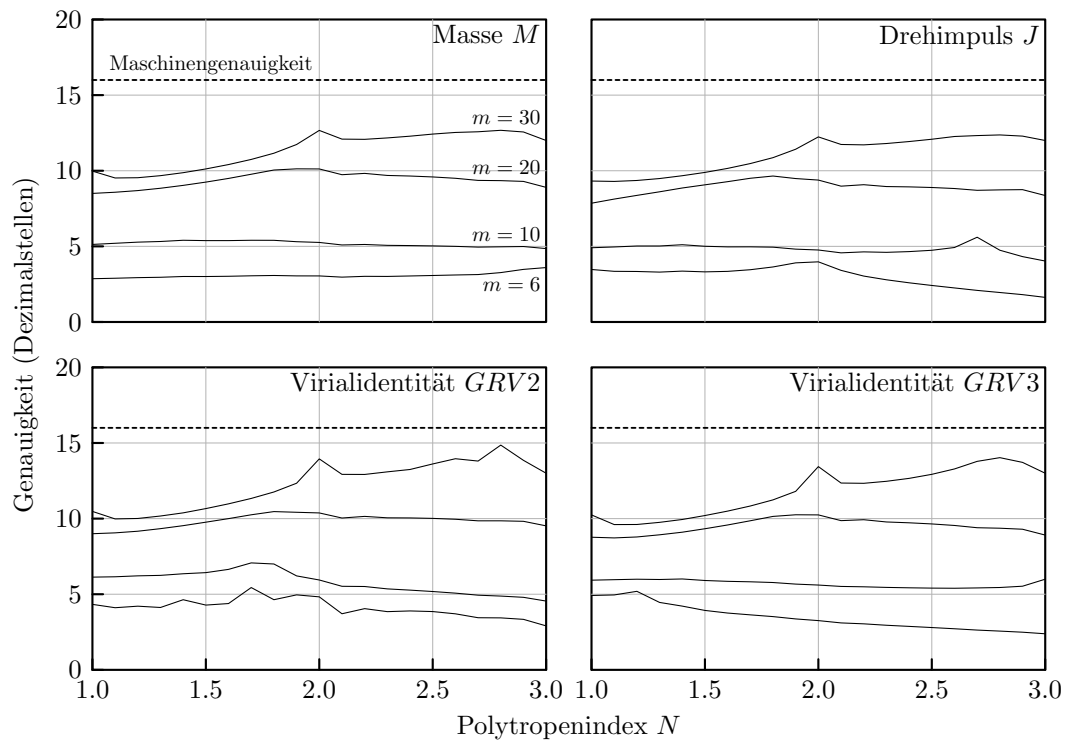


Abbildung 2.6: Konvergenz des AKM-Verfahrens bei verschiedenen Zustandsgleichungen für axialsymmetrische Sterne an der Mass-shedding-Grenze.

KAPITEL 3

Das AKM-Verfahren für toroidale Sterne

Analog zum sphärisch symmetrischen Fall wird das AKM-Verfahren für axialsymmetrische, stationäre, starr rotierende, ringförmige Objekte erläutert. Die Metrik in LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten und die daraus resultierenden Feldgleichungen werden wir – um den Rahmen der Arbeit nicht zu sprengen – nur zitieren, während die notwendigen Koordinatentransformationen und Darstellungen der metrischen Funktionen eingehender beleuchtet werden. Im Anschluß daran folgen einige Bemerkungen zum algorithmischen Ablauf der AKM-Routine.

3.1 Metrik und Feldgleichungen

Aufgrund der zwei vorhandenen Symmetrien, nämlich Stationarität und Axialsymmetrie, kann man Koordinaten finden, in denen die metrischen Funktionen nur von zwei Koordinaten abhängen. Weiterhin läßt sich die Zahl der Diagonalelemente reduzieren. Fordert man noch, daß die metrischen Funktionen, sowie deren erste Ableitungen an der Sternoberfläche stetig übergehen, ergibt sich eindeutig für das Linienelement in sogenannten LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten

$$ds^2 = e^{-2\nu} (e^{2\kappa}(d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2(d\phi - \omega dt)^2) - e^{2\nu} dt^2, \quad (3.1)$$

wobei die vier metrischen Funktionen (auch Potentiale genannt) κ , ν , ω und W nur von ρ und ζ abhängen.

Im Sterninneren verwenden wir mitrotierende Koordinaten, also $\tilde{\phi} = \phi - \Omega t$ mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω . Desweiteren formen wir die Metrik noch etwas um:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{-2\nu} (e^{2\kappa}(d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2(d\tilde{\phi} + (\Omega - \omega)dt)^2) - e^{2\nu} dt^2 \\ &= e^{2(\kappa-\nu)}(d\rho^2 + d\zeta^2) - \frac{W^2}{e^{-2\nu}W^2(\Omega - \omega)^2 - e^{2\nu}} d\tilde{\phi}^2 \\ &\quad + (e^{-2\nu}W^2(\Omega - \omega)^2 - e^{2\nu}) \left(dt + \frac{e^{-2\nu}W^2(\Omega - \omega)}{e^{-2\nu}W^2(\Omega - \omega)^2 - e^{2\nu}} d\tilde{\phi} \right)^2. \end{aligned}$$

Mit den neuen metrischen Funktionen V , a und k , definiert durch

$$\begin{aligned} e^{2V} &= -\left(e^{-2v}W^2(\Omega - \omega)^2 - e^{2v}\right) \\ a &= -e^{-2v}W^2(\Omega - \omega)e^{-2V} \\ k &= (\kappa - v) + V, \end{aligned} \quad (3.2)$$

lautet die Metrik im mitrotierenden System

$$ds^2 = e^{-2V} \left(e^{2k} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\tilde{\phi}^2 \right) - e^{2V} (ad\tilde{\phi} + dt)^2. \quad (3.3)$$

Im Sterninneren werden wir also stets die Potentiale $([k], V, a, W)$ und im Außenraum $([\kappa], v, \omega, W)$ verwenden. Die Funktionen k und κ kann man unter Verwendung der Feldgleichungen und geeigneter Randwerte durch ein Linienintegral aus den anderen Potentialen berechnen. Daher haben wir pro Gebiet nur noch drei unbekannte metrische Funktionen, die, wie gesagt, nur von ρ und ζ abhängen.

Der Wert von Ω kann als Parameter vorgegeben werden oder ergibt sich bei anderer Parametervorgabe aus der Lösung. Die Tatsache, daß Ω die Winkelgeschwindigkeit des Sterns beschreibt, also der Stern bzgl. $\tilde{\phi}$ ruht, entspricht der speziellen Form des Energie-Impuls-Tensors. Ω tritt bei der Umrechnung der Potentiale an der Sternoberfläche in Erscheinung.

In den eben eingeführten axialsymmetrischen Metriken geben wir nun die EINSTEINSchen Feldgleichungen (1.2) an. Die Berechnung des EINSTEIN-Tensors aus den metrischen Funktionen soll – aus Platzgründen – hier nicht im Detail angegeben werden. Es sei beispielsweise auf [27] verwiesen. Die Feldgleichungen lauten im Außenraum

$$\begin{aligned} \Delta W &= 0, \\ \Delta v + \frac{\nabla W}{W} \nabla v - \frac{W^2}{2e^{4v}} (\nabla \omega)^2 &= 0, \\ \Delta \omega + \left(3 \frac{\nabla W}{W} - 4 \nabla v \right) \nabla \omega &= 0, \\ \Delta \kappa + (\nabla v)^2 - \frac{3W^2}{4e^{4v}} (\nabla \omega)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

und im Innenraum

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{W} &= 16\pi p e^{2(k-V)}, \\ \Delta V + \frac{\nabla W}{W} \nabla V + \frac{e^{4V}}{2W^2} (\nabla a)^2 &= 4\pi(\mu + 3p) e^{2(k-V)}, \\ \Delta a - \frac{\nabla W}{W} \nabla a + 4 \nabla V \nabla a &= 0, \\ \Delta k + (\nabla V)^2 + \frac{e^{4V}}{4W^2} (\nabla a)^2 &= 8\pi p e^{2(k-V)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dabei ist $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_\rho \\ \partial_\zeta \end{pmatrix}$ und $\Delta = \partial_\rho^2 + \partial_\zeta^2$. Die Außenraum-Gleichungen sind homogen, da im Vakuum der Energie-Impuls-Tensor verschwindet. Im Innengebiet gilt auch hier die Darstellung (1.3) einer ruhenden idealen Flüssigkeit, da wir starre Rotation fordern und uns im mitrotierenden Bezugssystem befinden.

Wie schon angedeutet, kann man die Funktionen κ und k durch ein Linienintegral bestimmen. Für die jeweils vierte Feldgleichung findet man folgende (zusammen mit den drei anderen Gleichungen) äquivalente Formeln:

$$\begin{aligned} \nabla \kappa &= \frac{W}{(\nabla W)^2} \begin{pmatrix} W_{|\rho} & W_{|\zeta} \\ -W_{|\zeta} & W_{|\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{|\rho}^2 - v_{|\zeta}^2 - \frac{W^2}{4e^{4v}}(\omega_{|\rho}^2 - \omega_{|\zeta}^2) + \frac{W_{|\rho|\rho} - W_{|\zeta|\zeta}}{2W} \\ 2v_{|\rho}v_{|\zeta} - \frac{W^2}{2e^{4v}}\omega_{|\rho}\omega_{|\zeta} + \frac{W_{|\rho|\zeta}}{W} \end{pmatrix}, \\ \nabla k &= \frac{W}{(\nabla W)^2} \begin{pmatrix} W_{|\rho} & W_{|\zeta} \\ -W_{|\zeta} & W_{|\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{|\rho}^2 - V_{|\zeta}^2 - \frac{e^{4v}}{4W^2}(a_{|\rho}^2 - a_{|\zeta}^2) + \frac{W_{|\rho|\rho} - W_{|\zeta|\zeta}}{2W} \\ 2V_{|\rho}V_{|\zeta} - \frac{e^{4v}}{2W^2}a_{|\rho}a_{|\zeta} + \frac{W_{|\rho|\zeta}}{W} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die notwendige Randbedingung für diese Integration liefert folgende Überlegung. Auf der Rotationsachse müssen in LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten die Ableitungen der metrischen Funktionen nach ρ verschwinden (Regularitätsbedingung). Die gewählten Koordinaten sind auf der Achse ($\rho = 0$) singulär. Da die Raumzeit in jedem Punkt lokal flach ist, muß die Singularität (bis auf einen Faktor) von der gleichen Struktur sein wie bei Zylinderkoordinaten im flachen Raum. Aus (3.1) liest man deshalb ab:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{W(\rho, \zeta)}{\rho} = e^\kappa. \quad (3.7)$$

Aufgrund dieser Tatsache empfiehlt es sich im weiteren Verlauf anstelle von W nur Terme W/ρ zu verwenden. Dazu führen wir eine neue Größe

$$F = \frac{W}{\rho} - 1$$

ein. Die Feldgleichungen sind dementsprechend leicht zu modifizieren. Den Randwert für k erhält man damit durch

$$\kappa(\rho = 0, \zeta) = \ln(F(\rho = 0, \zeta) + 1). \quad (3.8)$$

3.2 Zustandsgleichung

Wir verwenden die relativistische EULERGleichung $T^{ik}_{||k} = 0$ mit

$$T^{ik} = (\mu + p)u^i u^k + p g^{ik}, \quad u^k = e^{-V} \delta_0^k \quad (3.9)$$

im mitrotierenden Bezugssystem und vorgegebener Zustandsgleichung $p = p(\mu)$. Es empfiehlt sich, die äquivalente Gleichung $T_j^k|_k = 0$ auszuwerten, da der gemischte Energie-Impuls-Tensor eine besonders einfache Struktur hat:

$$T_j^k = g_{ji} T^{ik} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ -a(p+\mu) & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Es folgt $T_1^k|_k = \frac{\partial p}{\partial \rho} + (\mu + p) \frac{\partial V}{\partial \rho}$ und $T_2^k|_k = \frac{\partial p}{\partial \zeta} + (\mu + p) \frac{\partial V}{\partial \zeta}$, während die beiden anderen Komponenten identisch verschwinden.

Daraus folgt dieselbe Beziehung wie im kugelsymmetrischen Fall (Gleichung (1.7)) zwischen der metrischen Funktion V und dem Druck p

$$\int_0^p \frac{d\tilde{p}}{\mu(\tilde{p}) + \tilde{p}} = V_B - V. \quad (3.10)$$

Die Integrationskonstante V_B ist der Wert von V an der Sternoberfläche, da hier der Druck verschwindet.

3.3 Koordinatentransformationen

Aufgrund der Symmetrien müssen wir nur den ersten Quadranten der ρ - ζ -Ebene betrachten. Dieser wird in vier Gebiete aufgeteilt (vgl. Abbildung 3.1):

- Gebiet 4: Innengebiet, begrenzt durch die (zunächst unbekannte) Sternoberfläche und die ρ -Achse,
- Gebiet 3: Oberflächennahes Außengebiet, begrenzt durch zwei Abschnitte der ρ -Achse, der Oberfläche und einer Trennlinie, die durch zwei feste Koordinatenparameter beschrieben wird,
- Gebiet 1: Fernfeldgebiet, bis ins Unendliche reichendes Außengebiet, begrenzt durch die ρ - und ζ -Achse und eine weitere Trennlinie (mit zugehörigem Koordinatenparameter) und
- Gebiet 2: Außengebiet, das zwischen Gebiet 1 und Gebiet 3 liegt.

Jedes dieser Gebiete wird schließlich auf ein Einheitsquadrat $(s, t) \in [0, 1]^2$ abgebildet. In Abbildung 3.1 ist die Gebietsaufteilung mit den Linien konstanter s - bzw. t -Koordinaten dargestellt.

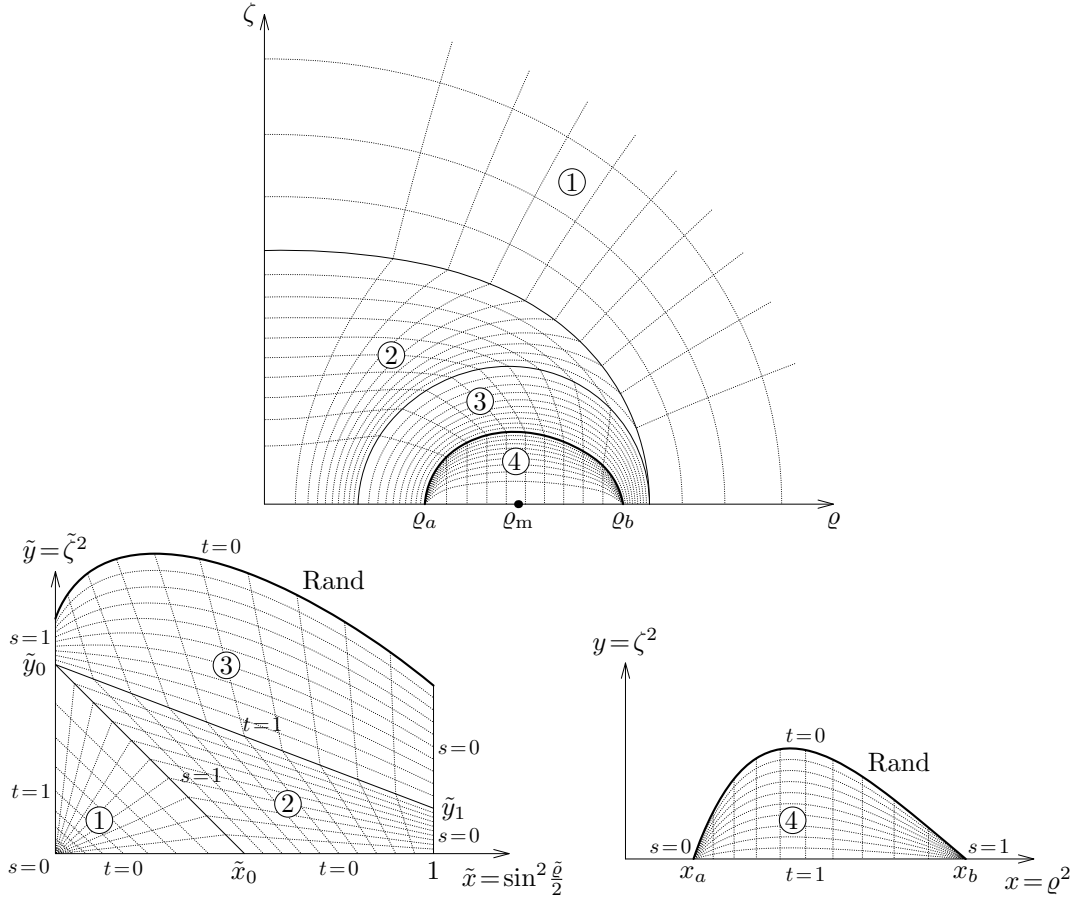


Abbildung 3.1: Gebietsaufteilung bei toroidalen Sternen. Gebiet 4 repräsentiert den Ring, die Gebiete 1 bis 3 sind Vakuumgebiete

3.3.1 Innengebiet

Im Gebiet 4 müssen Normalenableitungen an der Äquatorialebene verschwinden. Dies wird durch die Darstellung $\zeta^2 = y$ erreicht, denn $\partial_\zeta = 2\zeta\partial_y$. Der Einheitlichkeit wegen (und für den Grenzfall $\rho_a = 0$) verfahren wir mit ρ analog, also $\rho^2 = x$, vgl. Abbildung 3.1 unten rechts. Im x - y -System führen wir schließlich normierte Koordinaten $(s, t) \in [0, 1]^2$ ein:

$$\begin{aligned} \text{Gebiet 4:} \quad \rho^2 &= x = x_a + (x_b - x_a) \cdot \sigma(s) & (x_a = \rho_a^2, x_b = \rho_b^2) \\ \zeta^2 &= y = s \cdot (1 - s) \cdot (1 - t) \cdot g(s). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dabei ist $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine streng monoton wachsende Funktion mit $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(1) = 1$, mit deren Hilfe man die Dichte der Koordinatenlinien beeinflussen kann. Bei-

spielsweise eignet sich $\sigma(s) = \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha s}$, wobei $\alpha \in [0, 1[$ eine festzulegende Konstante ist.¹ Zusammen mit den inneren und äußeren Radien ρ_a und ρ_b beschreibt die Funktion $g(s)$ die Form der Oberfläche des toroidalen Sterns.

3.3.2 Außengebiete

Zunächst wird das gesamte Äußere des Sterns durch die Transformation der komplexen Ebene

$$z = i\rho_m \cot \frac{\tilde{z}}{2} \quad (z = \rho + i\zeta, \tilde{z} = \tilde{\rho} + i\tilde{\zeta})$$

auf ein kompaktes Gebiet abgebildet.² ρ_m ist ein beliebiger Wert zwischen ρ_a und ρ_b . Dazu eignet sich beispielsweise das geometrische Mittel der Sternradien. Um die Allgemeinheit nicht einzuschränken wird zunächst folgende Bildung

$$\rho_m = (1 - \beta)\sqrt{\rho_a \rho_b} + \beta \frac{\rho_a + \rho_b}{2}, \quad x_m = \rho_m^2$$

mit einer Konstanten β verwendet.³ Die Regularitätsbedingungen auf den Achsen werden durch die Einführung der neuen Koordinaten

$$\tilde{y} = \tilde{\zeta}^2 \quad \text{und} \quad \tilde{x} = \sin^2 \frac{\tilde{\rho}}{2}$$

erfüllt.

Nun wird das Außengebiet wie angekündigt weiter unterteilt. Dies geschieht, wie in Abbildung 3.1 unten links dargestellt, durch zwei gerade Trennlinien, die durch die drei vorzugebenden Größen \tilde{x}_0 , \tilde{y}_0 und \tilde{y}_1 bestimmt sind. Die Gebiete 1 und 2 können nun in einfacher Weise auf Einheitsquadrate abgebildet werden:

$$\text{Gebiet 1:} \quad \tilde{x} = (1-t)s^2\tilde{x}_0, \quad \tilde{y} = s^2t(s\tilde{y}_0 + 4(1-s)\tilde{x}_0),$$

$$\text{Gebiet 2:} \quad \tilde{x} = (1-s) + s(1-t)\tilde{x}_0, \quad \tilde{y} = t(s\tilde{y}_0 + (1-s)\tilde{y}_1).$$

¹In den meisten Fällen reicht die Identität $\sigma(s) = s$ vollkommen aus. In extremen Grenzfällen empfiehlt es sich, die Koordinaten besser an die Lösung anzupassen. In einer solchen Situation wäre aber zunächst die Einführung spinnennetzartiger Koordinaten mit geeignet gewähltem Zentrum sinnvoll.

²Für die Koordinaten gelten dann folgende Transformationsformeln

$$\rho = \rho_m \frac{\sinh \tilde{\zeta}}{\cosh \tilde{\zeta} - \cos \tilde{\rho}}, \quad \zeta = \rho_m \frac{\sin \tilde{\rho}}{\cosh \tilde{\zeta} - \cos \tilde{\rho}}.$$

³Für $\beta \in [0, 1]$ ist automatisch $\rho_a < \rho_m < \rho_b$ erfüllt. In der Praxis genügt es meist, $\beta = 0$ zu verwenden.

Im dritten Gebiet machen wir noch einen Zwischenschritt, der gewährleistet, daß auf dem Rand ($t = 0$) gleichen s -Werten in Gebiet 3 und 4 derselbe Punkt entspricht:

$$\text{Gebiet 3:} \quad \tilde{x} = (1-s)t + (1-t)\tilde{x}_B(s), \quad \tilde{y} = t(s\tilde{y}_0 + (1-s)\tilde{y}_1) + (1-t)\tilde{y}_B(s),$$

$$\tilde{x}_B(s) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_B(s) + y_B(s) - x_m}{\sqrt{(x_B(s) + y_B(s) - x_m)^2 + 4x_m y_B(s)}} \right),$$

$$\tilde{y}_B(s) = \operatorname{artanh}^2 \frac{2\rho_m \sqrt{x_B(s)}}{x_B(s) + y_B(s) + x_m},$$

$$x_B(s) = x_a + \sigma(s)(x_b - x_a), \quad y_B(s) = s(1-s)g(s).$$

Die gesamte Koordinatentransformation wird also durch

- die Sternradien ρ_a und ρ_b ,
- die eindimensionale Oberflächenfunktion $g(s)$
- und die Parameter $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \alpha$ und β

festgelegt.

3.4 Darstellung der metrischen Funktionen

In den 4 Teilgebieten werden die metrischen Funktionen in einer speziellen Form dargestellt, die zum einen den stetigen Übergang an den Grenzflächen sichert und zum anderen das asymptotische Verhalten im Fernfeld berücksichtigt.

Gebiet 1:

$$e^{2v} = s^{j_v} \left((1-s)I_v(t) + s[e^{2v_0} + (t-1)T_v^{(b)}(t) + (s-1)H_1(s,t)] \right)$$

$$\omega = s^{j_\omega} \left((1-s)I_\omega(t) + s[\omega_0 + (t-1)T_\omega^{(b)}(t) + (s-1)G_1(s,t)] \right)$$

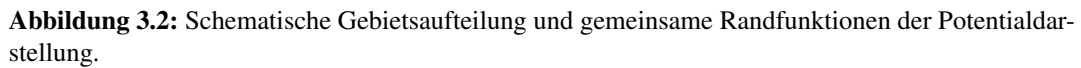
$$F = s^{j_F} \left((1-s)I_F(t) + s[F_0 + (t-1)T_F^{(b)}(t) + (s-1)Z_1(s,t)] \right)$$

Gebiet 2:

$$e^{2v} = e^{2v_0} + (t-1)T_v^{(b)}(t) + (s-1)T_v^{(a)}(s) + (s-1)(t-1)H_2(s,t)$$

$$\omega = \omega_0 + (t-1)T_\omega^{(b)}(t) + (s-1)T_\omega^{(a)}(s) + (s-1)(t-1)G_2(s,t)$$

$$F = F_0 + (t-1)T_F^{(b)}(t) + (s-1)T_F^{(a)}(s) + (s-1)(t-1)Z_2(s,t)$$


$$\begin{aligned} e^{2v} &= (1-t)T_V^{(B)}(s) + t[e^{2v_0} + (s-1)T_V^{(a)}(s) + (t-1)H_3(s,t)] \\ \omega &= (1-t)T_\omega^{(B)}(s) + t[\omega_0 + (s-1)T_\omega^{(a)}(s) + (t-1)G_3(s,t)] \\ F &= (1-t)T_F^{(B)}(s) + t[F_0 + (s-1)T_F^{(a)}(s) + (t-1)Z_3(s,t)] \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} e^{2V} &= e^{2V_B} + t(1-s)sH_4(s,t) \\ ae^{2V} &= T_a^{(B)}(s) + t(1-s)sG_4(s,t) \\ F &= T_F^{(B)}(s) + t(1-s)sZ_4(s,t) \end{aligned}$$
$$\begin{array}{ccc} e^{2V} = e^{2V_B} & & e^{2v} = T_v^{(B)}(s) \\ ae^{2V} = T_a^{(B)}(s) & \Longleftrightarrow & \omega = T_\omega^{(B)}(s). \end{array}$$
$$e^{2\nu} = \frac{W^2 e^{2V}}{W^2 - (ae^{2V})^2} \quad \text{und} \quad \omega = \Omega + \frac{ae^{2V} \cdot e^{2V}}{W^2 - (ae^{2V})^2}. \quad (3.12)$$

Die Funktionen I_v , I_ω und I_F sind hier nur Konstanten, später brauchen wir kompliziertere Abhängigkeiten zur Beschreibung der Innenwelt-Lösung eines Schwarzen Loches, siehe Abschnitt 4.3. Die Potenzen von s in Gebiet 1 werden dem asymptotischen Verhalten angepaßt. Dazu berechnen wir zunächst die radiale Koordinate r :

$$r = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} = \frac{\rho_m}{\cosh \tilde{\zeta} - \cos \tilde{\rho}} \sqrt{\sinh^2 \tilde{\zeta} + \sin^2 \tilde{\rho}} = \frac{\rho_m \sqrt{\cosh \tilde{\zeta} + \cos \tilde{\rho}}}{\sqrt{\cosh \tilde{\zeta} - \cos \tilde{\rho}}}.$$

Im Limes $\tilde{\rho}, \tilde{\zeta} \rightarrow 0$ bekommen wir

$$\frac{1}{r} \sim \frac{\sqrt{\tilde{\zeta}^2 + \tilde{\rho}^2}}{2\rho_m} \sim \frac{\sqrt{\tilde{y} + 4\tilde{x}}}{2\rho_m} = \frac{\sqrt{4s^2\tilde{x}_0 + s^3t(\tilde{y}_0 - 4\tilde{x}_0)}}{2\rho_m} \sim \frac{\sqrt{\tilde{x}_0}}{\rho_m} s \sim O(s).$$

Damit lesen wir aus dem Fernfeld-Verhalten (flacher MINKOWSKI-Raum) folgende Werte ab:

$v \sim r^{-1}$	$e^{2v} \sim 1 + O(s)$	$j_v = 0$	$I_v = 1$
$\omega \sim r^{-3}$	$\omega \sim O(s^3)$	$j_\omega = 2$	$I_\omega = 0$
$F \sim r^{-2}$	$F \sim O(s^2)$	$j_F = 1$	$I_F = 0$

3.5 Bemerkungen zum Programmablauf

Alle Funktionen von s und t werden wieder nach CHEBYSHEV-Polynomen entwickelt. Der Variablen-Vektor \vec{x} umfaßt die folgenden $12m^2 + 9m + 2$ zu bestimmenden Koeffizienten:

- $12m^2$ Koeffizienten der Potentiale H_i, G_i, Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$)
- $3m$ Koeffizienten für $T_{v/\omega/F}^{(a)}$
- $3(m-1)$ Koeffizienten für $T_{v/\omega/F}^{(b)}$
- 3 Variablen e^{2v_0}, ω_0, F_0
- $2m$ Koeffizienten für $T_{a/F}^{(B)}$
- $m-2$ Koeffizienten für g (Oberflächenfunktion)
- 2 Sternradien x_a und x_b
- 2 freie Variablen e^{2V_B} und Ω .

Dem stehen genauso viele Gleichungen $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ gegenüber:

- $12m^2$ Gleichungen an den inneren Gitterpunkten
- $9m$ Gleichungen für die Normalenableitungen von e^{2v} , ω und F an den drei Gebietsgrenzen
- 2 Parametervorgaben.

In manchen Programmversionen sind spezielle Vorgaben direkt implementiert, ohne das diese über das NEWTON-RAPHSON-Verfahren bestimmt werden müssen. Gibt man beispielsweise das Radienverhältnis vor, kann man auf die Variable x_b verzichten und anstelle einer Parametervorgabe dieses x_b direkt aus x_a bestimmen.

Bei der Berechnung des Vektors $\vec{f}(\vec{x})$ sind folgende Schritte durchzuführen:

1. Berechnung der Feldgleichungen und Normalenableitungen im Gebiet 1. Da die Feldgleichungen (3.4) homogen sind, brauchen wir κ nicht.
2. Analoge Berechnungen in den Gebieten 2 und 3. Zusätzlich wird in Gebiet 2 $\kappa(s=0, t=0)$ gemäß (3.8) bestimmt und mittels (3.6) entlang der Äquatorebene nach $(s=0, t=1)$ transportiert. Anschließend wird κ in Gebiet 3 nach $(s=0, t=0)$ weitertransportiert und gemäß (3.2) in $k-V$ umgerechnet.
3. Bestimmung von $k-V$ im ganzen Gebiet 4 aus dem Wert bei $(s=0, t=0)$ gemäß (3.6). Berechnung der Feldgleichungen (3.5) unter Verwendung von $k-V$. Berechnung der Normalenableitungen und Umrechnung auf das nichtrotierende System.
4. Auswertung der Parametervorgaben.

Die Koordinatentransformationen in den einzelnen Gebieten sind so angelegt, daß an den Gebietsgrenzen gleichen Parameterwerten s (bzw. t) dieselben Punkte (ρ, ζ) entsprechen. Zur Berechnung der Normalenableitungen wird die Richtungsableitung

$$\partial_n = \vec{n} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} -\zeta|_s \\ \rho|_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_\rho \\ \partial_\zeta \end{pmatrix} = \rho|_s \partial_\zeta - \zeta|_s \partial_\rho.$$

verwendet.

KAPITEL 4

Übergänge zu Schwarzen Löchern

Zur Einstimmung wollen wir mathematisch nachvollziehen, daß kugelsymmetrische Sterne keinen quasistationären Übergang zum Schwarzen Loch erlauben.

Im Anschluß behandeln wir die KERR-Metrik als rotierende Lösung für ein Schwarzes Loch. Wir beschreiben ferner eine Modifikation des AKM-Verfahrens, die es erlaubt, durch eine geeignete Reskalierung der Metrik, im Koordinatenursprung verschwindende Objekte zu untersuchen. Damit wird die „Innenwelt“ eines – in einem Parametergrenzfall entstehenden – Schwarzen Loches zugänglich.

Danach folgt ein schematischer Überblick der, mit Hilfe des AKM-Verfahrens klassifizierten, Lösungen homogener Sterne.

Wir wenden uns dann ringförmigen Konfigurationen mit der CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung zu und diskutieren einen konkreten, physikalisch motivierbaren, quasistationären Übergang zum extremen Schwarzen Loch.

4.1 Der minimale Radius kugelsymmetrischer Sterne

Fixiert man die Zustandsgleichung, so haben statische Sterne eine maximale Masse.¹ Bei homogenen Modellen entspricht das dem Grenzfall unendlichen Zentraldrucks, während bei weichen Zustandsgleichungen die maximale Masse bei endlichem Druck, oder sogar im NEWTONschen Grenzfall ($p_c \rightarrow 0$), erreicht wird.

Als Konsequenz der Feldgleichungen folgt, daß statische Sterne im Gleichgewicht zwischen Druck und Gravitation einen Mindestradius

$$R \geq R_{\min} = \frac{9}{8} \cdot 2M \quad (4.1)$$

haben müssen. Der Sternradius ist also größer als der SCHWARZSCHILD-Radius $2M$. Folglich kann es keinen stetigen Übergang von einem solchen Stern zu einem Schwarzen Loch geben.

¹Die numerischen Untersuchungen in dieser und anderen Arbeiten sprechen dafür, daß allgemein auch rotierende, axialsymmetrische Sterne späröidaler Topologie eine (von der Zustandsgleichung abhängige) Maximalmasse haben.

Die eben genannte Relation soll im folgenden hergeleitet werden. Dazu geben wir nochmal die Feldgleichungen (1.4a)–(1.4c) an:

$$\frac{1}{2A} \cdot \frac{B''}{B} - \frac{A'}{4A^2} \cdot \frac{B'}{B} - \frac{1}{4A} \cdot \frac{(B')^2}{B^2} + \frac{1}{rA} \cdot \frac{B'}{B} = 4\pi(\mu + 3p) \quad (4.2a)$$

$$\frac{-1}{2A} \cdot \frac{B''}{B} + \frac{A'}{4A^2} \cdot \frac{B'}{B} + \frac{1}{4A} \cdot \frac{(B')^2}{B^2} + \frac{A'}{rA^2} = 4\pi(\mu - p) \quad (4.2b)$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{A'}{2rA^2} - \frac{1}{2rA} \frac{B'}{B} - \frac{1}{Ar^2} = 4\pi(\mu - p) \quad (4.2c)$$

Wir bilden nun $\frac{1}{2}(4.2a) + \frac{1}{2}(4.2b) + (4.2c)$:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{Ar^2} = 8\pi\mu.$$

Multiplikation mit r^2 und Integration von 0 bis r liefert

$$r - \frac{r}{A} = 2m, \quad \text{mit} \quad m = m(r) = 4\pi \int_0^r \tilde{r}^2 \mu(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad (4.3)$$

wobei die Integrationskonstante wegen $m(0) = 0$ entfällt. Der Wert $m(r)$ läßt sich als Masse innerhalb der Kugel vom Radius r interpretieren.

Weiterhin ergibt (4.2c) – (4.2b)

$$\frac{1}{2A} \cdot \frac{B''}{B} - \frac{A'}{4A^2} \cdot \frac{B'}{B} - \frac{1}{4A} \cdot \frac{(B')^2}{B^2} - \frac{1}{2rA} \frac{B'}{B} = \frac{A'}{2rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2}.$$

Nach Multiplikation mit \sqrt{AB}/r läßt sich die Gleichung folgendermaßen zusammenfassen:

$$\left(\frac{1}{r\sqrt{A}} (\sqrt{B})' \right)' = \sqrt{AB} \left(\frac{1 - 1/A}{2r^2} \right)' \stackrel{(4.3)}{=} \sqrt{AB} \left(\frac{m}{r^3} \right)'. \quad (4.4)$$

Gehen wir von der plausiblen Annahme aus, daß die Massendichte $\mu(r)$ zum Sternäußeren hin nicht zunimmt, kann auch die „durchschnittliche Dichte“ $m(r)/r^3$ nach außen nicht zunehmen. Folglich ist die rechte Seite der Gleichung (4.4) negativ bzw. null im Fall konstanter Dichte μ .

Wir integrieren nun die linke Seite von (4.4) von r bis R :

$$\frac{1}{R\sqrt{A(R)}} (\sqrt{B(r)})'_{r=R} - \frac{1}{r\sqrt{A(r)}} (\sqrt{B(r)})' \leq 0. \quad (4.5)$$

Da A , B und B' an der Oberfläche stetig übergehen (siehe Abschnitt 1.2.2), können wir die Randwerte aus der äußeren SCHWARZSCHILD-Lösung $B = 1 - \frac{2M}{r}$, $A = 1/B$ und $M = m(R)$ ablesen. Es gilt $\frac{1}{\sqrt{A(R)}} (\sqrt{B(r)})'_{r=R} = M/R^2$. Damit lautet (4.5)

$$\frac{M}{R^3} \cdot r \sqrt{A(r)} \leq (\sqrt{B(r)})'.$$

Integration von 0 bis R ergibt schließlich

$$\frac{M}{R^3} \int_0^R r \sqrt{A(r)} dr \leq \sqrt{B(R)} - \sqrt{B(0)} \leq \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}, \quad (4.6)$$

da $B(0) \geq 0$ gilt (allgemein ist $B(r) > 0$, da Vektoren u , die nur eine t -Komponente haben, zeitartig sind, d. h. $u^i u_i < 0$, vgl. (1.1)).

Als letztes schätzen wir noch das verbleibende Integral ab (beachte das Verhalten der durchschnittlichen Dichte $m(r)/r^3 \geq M/R^3$):

$$\begin{aligned} \int_0^R r \sqrt{A(r)} dr &\stackrel{(4.3)}{=} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{1 - 2m(r)/r}} dr \\ &\geq \int_0^R \frac{r}{\sqrt{1 - 2r^2 M/R^3}} dr = \frac{R^3}{2M} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right). \end{aligned}$$

Eingesetzt in (4.6) ergibt sich nach wenigen Umformungen die Behauptung (4.1).

Bemerkung: Bei $R = 2M$ wird die äußere SCHWARZSCHILD-Metrik singulär. Da es sich nur um eine Koordinatensingularität handelt, läßt sie sich durch Wahl anderer Koordinaten beseitigen. In der vorliegenden Form ist der obige Beweis nur für $R > 2M$ gültig. Diese zusätzliche Bedingung ist aber keine Einschränkung der Aussagekraft von (4.1). Von einem Stern kommend, also $R > 2M$, kann eine Folge von Gleichgewichtskonfigurationen ohnehin höchstens bis $R_{\min} = \frac{9}{8} \cdot 2M$ laufen.

4.2 Die KERR-Raumzeit

Neben der SCHWARZSCHILD-Lösung (1.9) sind weitere exakte Vakuum-Lösungen der EINSTEINSchen Feldgleichungen bekannt, wie beispielsweise die axialsymmetrische, stationäre KERR-Lösung. Sie beschreibt rotierende Schwarze Löcher. Entsprechend hängt sie von zwei Parametern, der Masse M und dem Drehimpuls J , ab. Die recht aufwendige Herleitung dieser Lösung würde den Rahmen dieser Arbeit erheblich überschreiten, wir verweisen daher auf einschlägige Literatur [11].

In BOYER-LINDQUIST-Koordinaten lautet die KERR-Lösung

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\Delta} (dr^2 + \Delta d\theta^2) + W^2 e^{-2\nu} (d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\nu} dt^2 \quad (4.7)$$

mit

$$\begin{aligned}\Sigma &= r^2 + \frac{J^2}{M^2} \cos^2 \theta \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + \frac{J^2}{M^2} \\ W^2 &= \Delta \sin^2 \theta \\ e^{2\nu} &= \frac{\Delta \Sigma}{\left(r^2 + \frac{J^2}{M^2}\right)^2 - \Delta \frac{J^2}{M^2} \sin^2 \theta} \\ \omega &= \frac{2rJ}{\Delta \Sigma} e^{2\nu}.\end{aligned}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $J \geq 0$. Weiterhin muß $J \leq M^2$ gelten. Dagegen haben wir bei Ring- und Scheiben-Lösungen $J \geq M^2$. Der gemeinsame Grenzfall $J = M^2$ kann tatsächlich erreicht werden [17], [16], [5].

Aus diesem Grund wollen wir die Metrik mit $J \geq M^2$ (extreme KERR-Metrik) etwas eingehender studieren. Die Metrik (4.7) hat schon fast die Struktur der Außenraum-Metrik in LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten, siehe Gleichung (3.1). Lediglich die räumlichen Koordinaten sind noch anzupassen. Zunächst ist wegen $\Delta = (r - M)^2$ eine Verschiebung

$$\tilde{r} = r - M$$

notwendig, anschließend können wir die Kugelkoordinaten $(\tilde{r}, \theta, \varphi)$ in Zylinderkoordinaten (ρ, ζ, φ) gemäß

$$\tilde{r}^2 = \rho^2 + \zeta^2, \quad \tan \theta = \frac{\rho}{\zeta},$$

also $d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 = d\rho^2 + d\zeta^2$, umrechnen. Damit lautet (4.7) im Grenzfall $J = M^2$

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\tilde{r}^2} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 e^{-2\nu} (d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\nu} dt^2 \quad (4.8)$$

mit

$$\begin{aligned}\Sigma &= (\tilde{r} + M)^2 + M^2 \cos^2 \theta \\ W^2 &= \tilde{r}^2 \sin^2 \theta \\ e^{2\nu} &= \frac{((\tilde{r} + M)^2 + M^2 \cos^2 \theta) \tilde{r}^2}{((\tilde{r} + M)^2 + M^2)^2 - \tilde{r}^2 M^2 \sin^2 \theta} \\ \omega &= \frac{2M^2(\tilde{r} + M)}{((\tilde{r} + M)^2 + M^2)^2 - \tilde{r}^2 M^2 \sin^2 \theta}.\end{aligned}$$

Ein wichtiger Anhaltspunkt bei der Diskussion von Metriken sind Ergosphären. Dies sind Regionen der Raumzeit, in denen die Koordinate t ihre Rolle als „Zeit“ vollständig verliert. In einer asymptotisch flachen Raumzeit ist (bei geeigneter Koordinatenwahl) t die Eigenzeit eines im Unendlichen ruhenden Beobachters. Für andere ruhende Beobachter unterscheiden sich Eigenzeit und Koordinatenzeit gemäß

$$d\tau^2 = -g_{tt}dt^2.$$

Ist jedoch g_{tt} positiv (Ergosphäre), kann ein Beobachter (bzgl. der anderen Koordinaten) nicht ruhen. Im Falle der KERR-Metrik muß er zwangsläufig eine Rotation ausführen. Der Rand einer Ergosphäre wird durch die Bedingung $g_{tt} = 0$ charakterisiert, also wegen (4.8)

$$g_{tt} = W^2 e^{-2\nu} \omega^2 - e^{2\nu} = 0.$$

Wir setzen die metrischen Koeffizienten der KERR-Lösung ein und erhalten

$$2M^2(\tilde{r} + M)\tilde{r}\sin\theta = \pm((\tilde{r} + M)^2 + M^2\cos^2\theta)\tilde{r}^2.$$

Wegen $\tilde{r} \geq 0$, $M > 0$ und $0 \leq \theta \leq \pi$ kommt nur das Pluszeichen infrage. Diese Gleichung kann man unter Verwendung von $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ auch folgendermaßen schreiben:

$$(\tilde{r} - M\sin\theta)(\tilde{r}^2 + \tilde{r}M(2 + \sin\theta) + 2M^2) = 0.$$

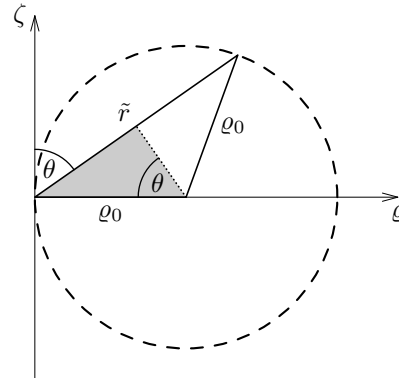
Der zweite Faktor ist stets positiv, es verbleibt die Beziehung

$$\sin\theta = \frac{\tilde{r}}{M}.$$

Dies ist aber genau ein Kreis mit dem Radius $\rho_0 = M/2$ und dem Mittelpunkt ($\rho = M/2, \zeta = 0$). Die Winkelgeschwindigkeit des Horizonts ($r = M$) beträgt

$$\Omega_H = \omega(\tilde{r} = 0, \theta) = \frac{1}{2M},$$

so daß $\rho_0 = \frac{1}{4\Omega_H}$ gilt.



4.3 Asymptotik der Innenwelt

Um die Geometrie der extremen KERR-Lösung zu studieren, lohnt es sich, den Übergang zu $J = M^2$ anhand charakteristischer Radien zu untersuchen [16], [8]. Dazu betrachten wir

die folgenden Radien:

$$\begin{aligned}
 r_+ &= M \left(1 + \sqrt{1 - a^2} \right) \\
 r_{\text{ph}} &= 2M \left(1 + \cos \left(\frac{2}{3} \arccos(-a) \right) \right) \\
 r_{\text{mb}} &= 2M \left(1 - a + 2\sqrt{1 - a} \right) \\
 r_{\text{ms}} &= M \left(3 + Y - \sqrt{(3 - Y)(3 + Y + 2Z)} \right) \\
 a &= \frac{J}{M^2} \\
 Y &= 1 + \sqrt[3]{1 - a^2} \left(\sqrt[3]{1 + a} + \sqrt[3]{1 - a} \right) \\
 Z &= \sqrt{3a^2 + Y^2}.
 \end{aligned}$$

Die (größere) Lösung r_+ der Gleichung $\Delta = 0$ ist der Horizont des Schwarzen Loches. Die anderen drei Radien beziehen sich auf zirkuläre Orbits von Testteilchen, die in der Äquatorebene ($\theta = \pi/2$) in derselben Richtung wie das Schwarze Loch rotieren. Für $r > r_{\text{ph}}$ (photon orbit) sind solche Bewegungen möglich. Falls $r > r_{\text{mb}}$ (marginally bound orbit) ist die Bewegung gebunden und für $r > r_{\text{ms}}$ (marginally stable orbit) ist sie stabil.

Im Übergang $\frac{J}{M^2} \rightarrow 1$ nehmen diese vier Radien alle denselben Koordinatenwert $r = M$ an. Dennoch sind die physikalischen Abstände in diesem Limes nicht null, vgl. Abbildung 4.1 unten. Das heißt lediglich, daß die Koordinate r keine adäquate Beschreibung der gesamten Raumzeit zuläßt. Vielmehr wird die Geometrie in der Nähe des Horizonts durch eine Koordinatentransformation sichtbar [7]. Dazu betrachten wir die Koordinatentransformation

$$\tilde{r} = \frac{r - M}{\lambda}, \quad \tilde{t} = \lambda t, \quad \tilde{\phi} = \phi - \Omega_{\text{H}} t$$

mit anschließender Grenzwertbildung $\lambda \rightarrow 0$. Aus (4.8) ergibt sich damit

$$ds^2 = M^2(1 + \cos^2 \theta) \left(\frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2} + d\theta^2 \right) + \frac{4M^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \left(d\tilde{\phi} + \frac{\tilde{r} d\tilde{t}}{2M^2} \right)^2 - \frac{\tilde{r}^2(1 + \cos^2 \theta)}{4M^2} d\tilde{t}^2.$$

Schließlich rechnen wir diese Metrik wieder in Zylinderkoordinaten um. Wir erhalten

$$ds^2 = e^{-2\nu} (e^{2\kappa} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 (d\tilde{\phi} - \omega d\tilde{t})^2) - e^{2\nu} d\tilde{t}^2, \quad (4.9)$$

mit (beachte $\Omega = \frac{1}{2M}$, $\tilde{r}^2 = \rho^2 + \zeta^2$, $\tan \theta = \rho/\zeta$)

$$e^{2\nu} = \Omega^2 \tilde{r}^2 (1 + \cos^2 \theta)$$

$$e^{2\kappa} = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta)^2$$

$$W^2 = \tilde{r}^2 \sin^2 \theta$$

$$\omega = -2\Omega^2 \tilde{r}.$$

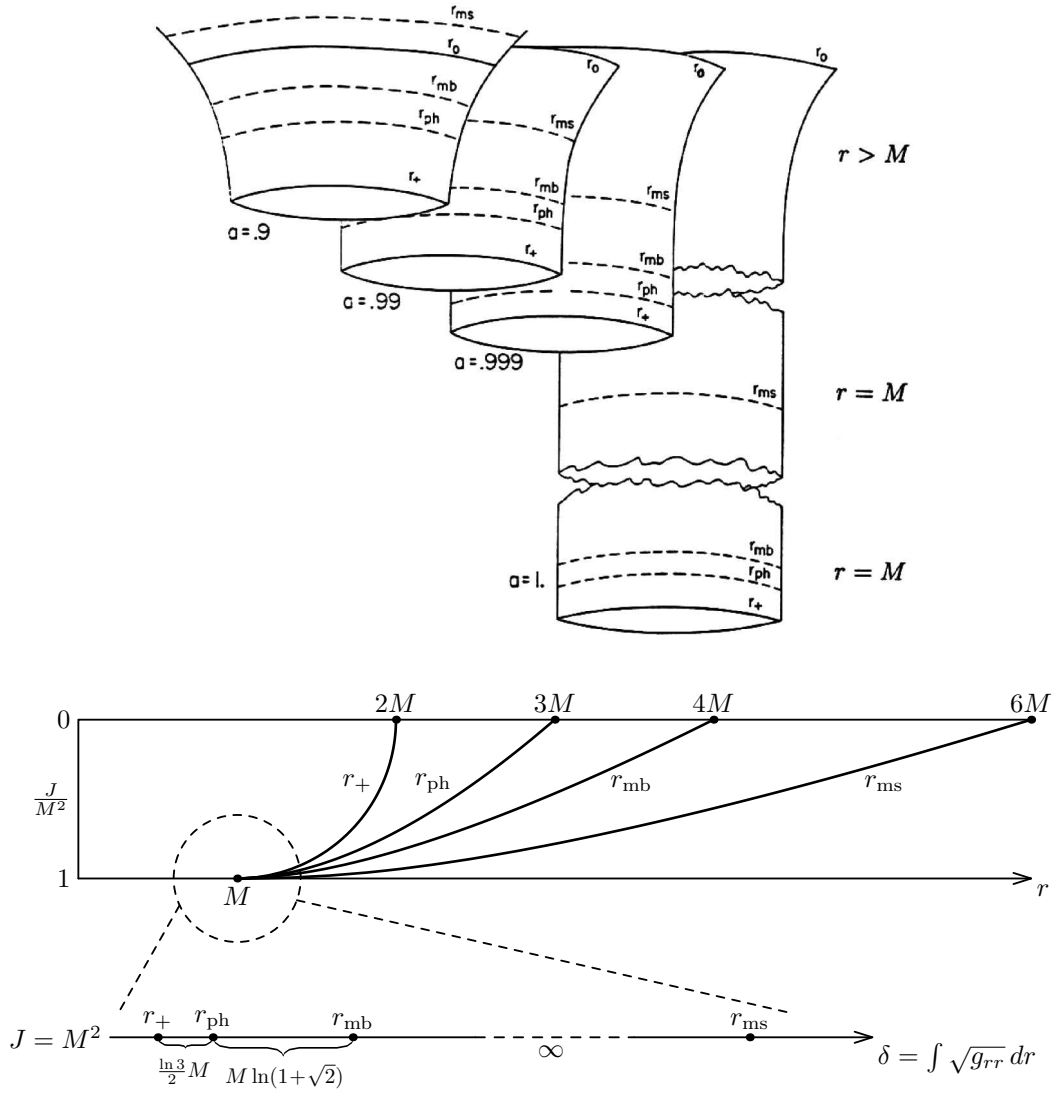


Abbildung 4.1: Die Geometrie der KERR-Raum-Zeit (entnommen aus [8]) und das Verhalten charakteristischer Radien beim Übergang zum extremen Schwarzen Loch.

Diese Metrik stellt gleichzeitig die Asymptotik der später zu bestimmenden „Innenweltlösung“ beim Parameter-Grenzübergang zum Schwarzen Loch dar. Mit Hilfe der Koordinatentransformationsformeln aus Abschnitt 3.3 bestimmen wir die Asymptotik im Unendlichen ($\tilde{\rho}, \tilde{\zeta} \rightarrow 0$) zu:

$$e^{2\nu} = \Omega^2(\rho^2 + 2\zeta^2) = \Omega^2 \rho_m^2 \frac{\sinh^2 \tilde{\zeta} + 2 \sin^2 \tilde{\rho}}{(\cosh \tilde{\zeta} - \cos \tilde{\rho})^2}$$

$$\begin{aligned}
\sinh^2 \tilde{\zeta} &= \tilde{y} + O(\tilde{y}^2) = 4s^2 t \tilde{x}_0 + O(s^3) \\
\sin^2 \tilde{\rho} &= 4\tilde{x} + O(\tilde{x}^2) = 4s^2(1-t)\tilde{x}_0 + O(s^4) \\
\cosh \tilde{\zeta} - \cos \tilde{\rho} &= \tilde{y}/2 + 2\tilde{x} + O(\tilde{y}^2) + O(\tilde{x}^2) = 2s^2 \tilde{x}_0 + O(s^3).
\end{aligned}$$

Daraus lesen wir die notwendigen Randfunktionen der Innenwelt in der Potentialdarstellung aus Abschnitt 3.4 ab (F wie im Normalfall, d. h. $j_F = 1$ und $I_F = 0$):

$e^{2v} = \Omega^2 \rho_m^2 \frac{2-t}{\tilde{x}_0 s^2} (1 + O(s))$	$j_v = -2$	$I_v(t) = \Omega^2 \rho_m^2 \frac{2-t}{\tilde{x}_0}$
$\omega = -2\Omega^2 \rho_m \frac{1}{s\sqrt{\tilde{x}_0}} (1 + O(s))$	$j_\omega = -1$	$I_\omega(t) = -2\Omega^2 \rho_m \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}_0}}$

4.4 Homogene Sterne

Die Struktur der relativistischen Lösungen sowie deren Grenzfälle von Sternen konstanter Massendichte wurde in unserer Arbeitsgruppe intensiv untersucht. An dieser Stelle soll anhand von Abbildung 4.2 ein kurzer Überblick zu diesen Lösungen gegeben werden. Anschließend diskutieren wir, wie sich die Lösungen zu anderen Zustandsgleichungen verhalten.

Zunächst betrachten wir die NEWTONschen Grenzfälle. Ausgangspunkt dazu ist die MACLAURIN-Sequenz, bestehend aus Rotationsellipsoiden. Wir bezeichnen mit A das Verhältnis von polarem und äquatorialem Radius.² Entsprechend besteht zwischen dem Radienverhältnis A und der Exzentrizität ϵ der Zusammenhang $\epsilon = \sqrt{1-A^2}$. Die MACLAURIN-Sequenz reicht von $A = 1$ (Kugel) bis $A = 0$ (Scheibe). Entlang dieser Sequenz befinden sich verschiedene Stellen, an denen Instabilitäten auftreten. Von besonderem Interesse sind die Punkte axialsymmetrischer säkularer Instabilitäten, da dort weitere axialsymmetrische NEWTONsche Sequenzen abzweigen [2]. In der folgenden Tabelle sind die ersten fünf dieser unendlich vielen Punkte angegeben.

k	Exzentrizität ϵ_k	Radienverhältnis A_k
1	0.98523	0.17126
2	0.99375	0.11160
3	0.99657	0.082750
4	0.99784	0.065744
5	0.99851	0.054534

An jedem Punkt A_k zweigen zwei Äste einer Sequenz ab. Der eine Ast (A_k^+) linsenförmiger Sterne endet an der Mass-shedding-Grenze, erkennbar an der Spitze am Äquator. Auf dem

²Beim Übergang zu toroidalen Konfigurationen bildet sich im Zentrum eine Einschnürung, im Grenzfall verschwindet der polare Radius, also $A = 0$. Man kann A dann fortsetzen, indem man für Ringe A als negatives Verhältnis von innerem und äußerem Radius in der Äquatorebene setzt.

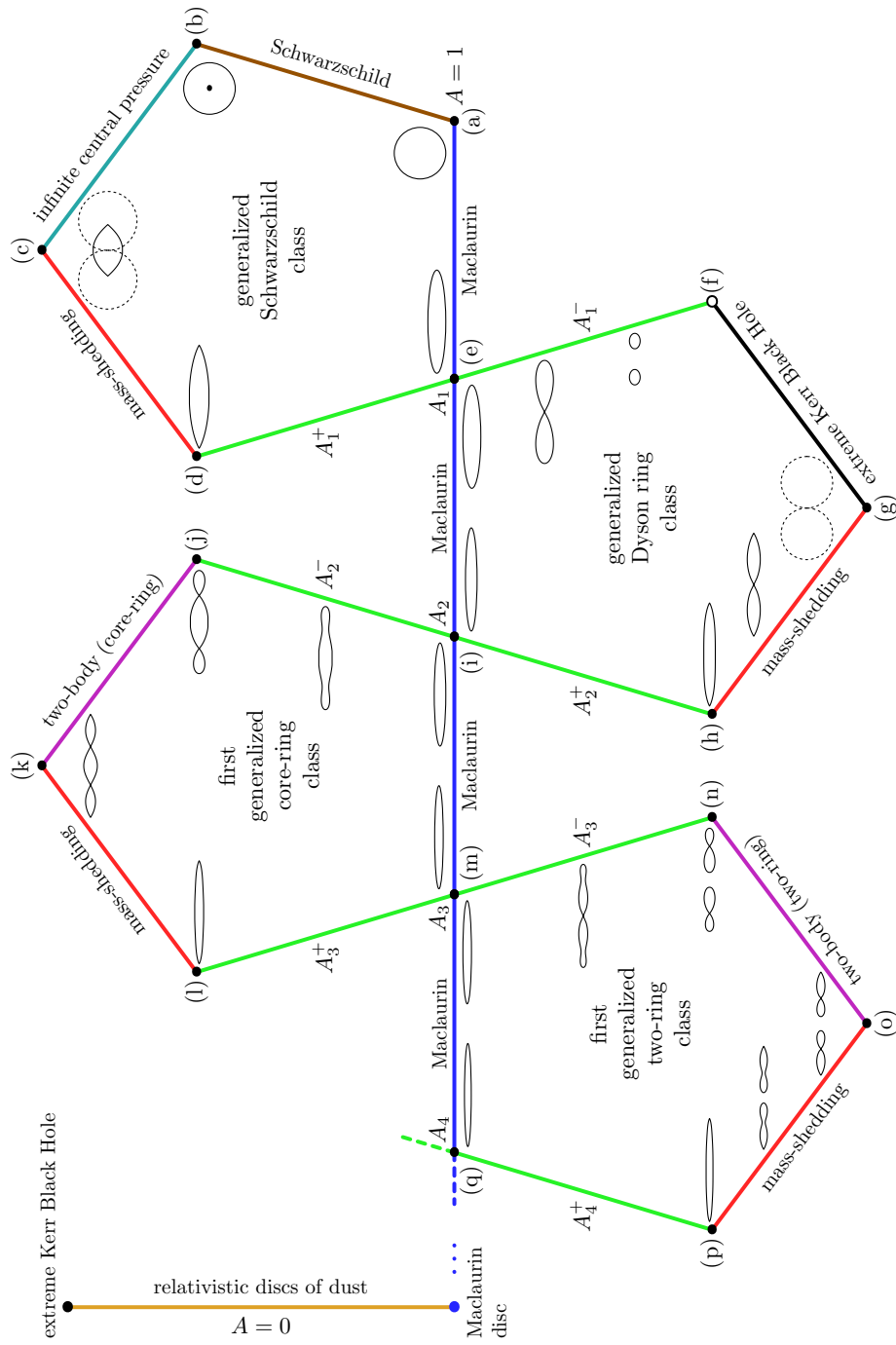


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Lösungsklassen homogener Sterne [3]. Eingezeichnet sind Querschnitte charakteristischer Konfigurationen und deren Ergosphären soweit vorhanden (gestrichelt).

anderen Ast (A_k^-) schnüren sich die Querschnitte an k Stellen ein. Für gerade k schnürt sich zuerst der äußerste Ring ab, es entsteht ein Zweikörpersystem bestehend aus einem Kern und einem Ring. Bei ungeraden $k > 1$ schnürt sich der Stern zuerst in der Mitte ein, es entsteht ein Ring mit weiteren Einschnürungen. Anschließend trennt sich auch hier der äußerste Ring ab, es entsteht ein Zweikörpersystem aus zwei Ringen. Die NEWTONschen Konfigurationen wurden bis $k = 10$ explizit berechnet [2], daher ist die dargestellte Verallgemeinerung naheliegend.

Die nun ins Relativistische laufenden Zwei-Körper- und Mass-shedding-Sequenzen (ausgehend von A_k^- und A_{k+1}^+ , $k \geq 2$) treffen sich schließlich und bilden damit den Abschluß einer Lösungsklasse. Das Abschneiden der Lösungsklassen bei Formierung eines Zweikörpersystems ist keine wirkliche physikalische Grenze, das Problem ist aber, daß die Fortsetzung nicht eindeutig ist. Es gibt keinen physikalischen Grund, für beide Teilkörper die gleiche Winkelgeschwindigkeit oder Rotverschiebung zu fordern.

Dagegen bilden die ersten beiden Klassen eine Ausnahme. Es bilden sich keine Mehrkörpersysteme, stattdessen gibt es andere physikalische Grenzsequenzen.

Die verallgemeinerte SCHWARZSCHILD-Klasse wird ausgehend vom kugelsymmetrischen NEWTONschen Stern durch die SCHWARZSCHILD-Sequenz und eine Sequenz mit unendlichem Zentraldruck begrenzt, Abbildung 4.2 (a)–(b)–(c). Innerhalb dieser Klasse gibt es einen Stern maximaler Masse (c), bei dem insbesondere auch viele andere Kenngrößen, wie Rotverschiebung, Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls, und andere, maximal werden [23].

Die verallgemeinerte DYSON-Ring-Sequenz erlaubt dagegen beliebig hohe Massen (Punkt (f)). Die Grenzsequenz (f)–(g) sind extreme KERR-Lösungen, d. h. $M^2 = J$. Damit wird es möglich, Folgen von Gleichgewichtskonfigurationen (auch mit beschränkter Masse) anzugeben, die gegen ein solches rotierendes Schwarzes Loch konvergieren.

Die einzelnen Lösungsklassen hängen nur über die Bifurkationspunkte der MACLAURIN-Sequenz zusammen. D. h. die Klassen echt relativistischer Lösungen ($M > 0$) sind disjunkt. Verfolgt man die MACLAURIN-Sequenz bis $A = 0$, kommt man zur Scheibenlösung. In diesem Grenzfall gibt es nur noch eine Flächenmassendichte und keinen Druck – die Materie ist staubförmig. Solche Staubscheiben können beispielsweise als Modell flacher Galaxien verwendet werden.

An die MACLAURIN-Scheibe schließt sich die Sequenz relativistischer Staubscheiben an. Diese Sequenz läßt sich analytisch beschreiben [18] und endet ebenfalls in der extremen KERR-Lösung. Als Grenzfall von relativistischen Sternen kann man diese Sequenz aber nur verstehen, wenn man die Kern-Ring- bzw. Zwei-Ring-Klassen über die Zweikörpergrenze hinaus verfolgt. Die Scheibenlösung ist dann als System unendlich vieler, unendlich dünner Ringe aufzufassen, wie schon von BARDEEN erkannt wurde [6].

4.5 Ringe mit CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung

Wir befassen uns nun mit dem Analogon der DYSON-Ring-Klasse für Sterne mit der CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung. Zur Umrechnung der durchweg verwendeten dimensionslosen Größen sei auf Tabelle 2.1 verwiesen.

Das Radienverhältnis $A = \rho_a/\rho_b$ ist der Quotient von innerem und äußerem äquatorialen Koordinatenradius der Ringe, vgl. Abbildung 3.1.

Generell existieren diese Ringe nur für $A > 0.323$, d. h. ein Übergang zu Sternen sphärischer Topologie ist nicht möglich.

Der NEWTONsche Grenzfall ist dadurch charakterisiert, daß die Größen Z_0 , Ω , M , J und M^2/J gegen null gehen, vgl. Abbildung 4.3.

Für $Z_0 \rightarrow \infty$, d. h. $Z_0/(1 + Z_0) = 1$ stellt sich die extreme KERR-Lösung ein. Dieses Verhalten kann mit dem modifizierten AKM-Programm (s. Abschnitt 4.3) numerisch überprüft werden.

Der Grenzfall $A \rightarrow 1$ ist etwas problematisch (Punkt (f) in Abbildung 4.2). Es handelt sich um immer dünner werdende Ringe, die immer größer und schwerer werden. Das Problem besteht schon im NEWTONschen Grenzfall, hier divergiert das Oberflächenpotential V . Damit verlassen die Sterne im Grenzfall $A \rightarrow 1$ den Gültigkeitsbereich der NEWTONschen Theorie. Entsprechend tritt dieser Grenzfall in den Diagrammen von Abbildung 4.3 unterschiedlich in Erscheinung. Insgesamt ist eine solche Konfiguration physikalisch nicht erreichbar. Die Lösungsklasse ist in dieser Hinsicht offen, d. h. nicht durch eine vernünftige Grenze abschließbar. Ein solcher Stern wäre ja gleichzeitig NEWTONsch und ein Schwarzes Loch!

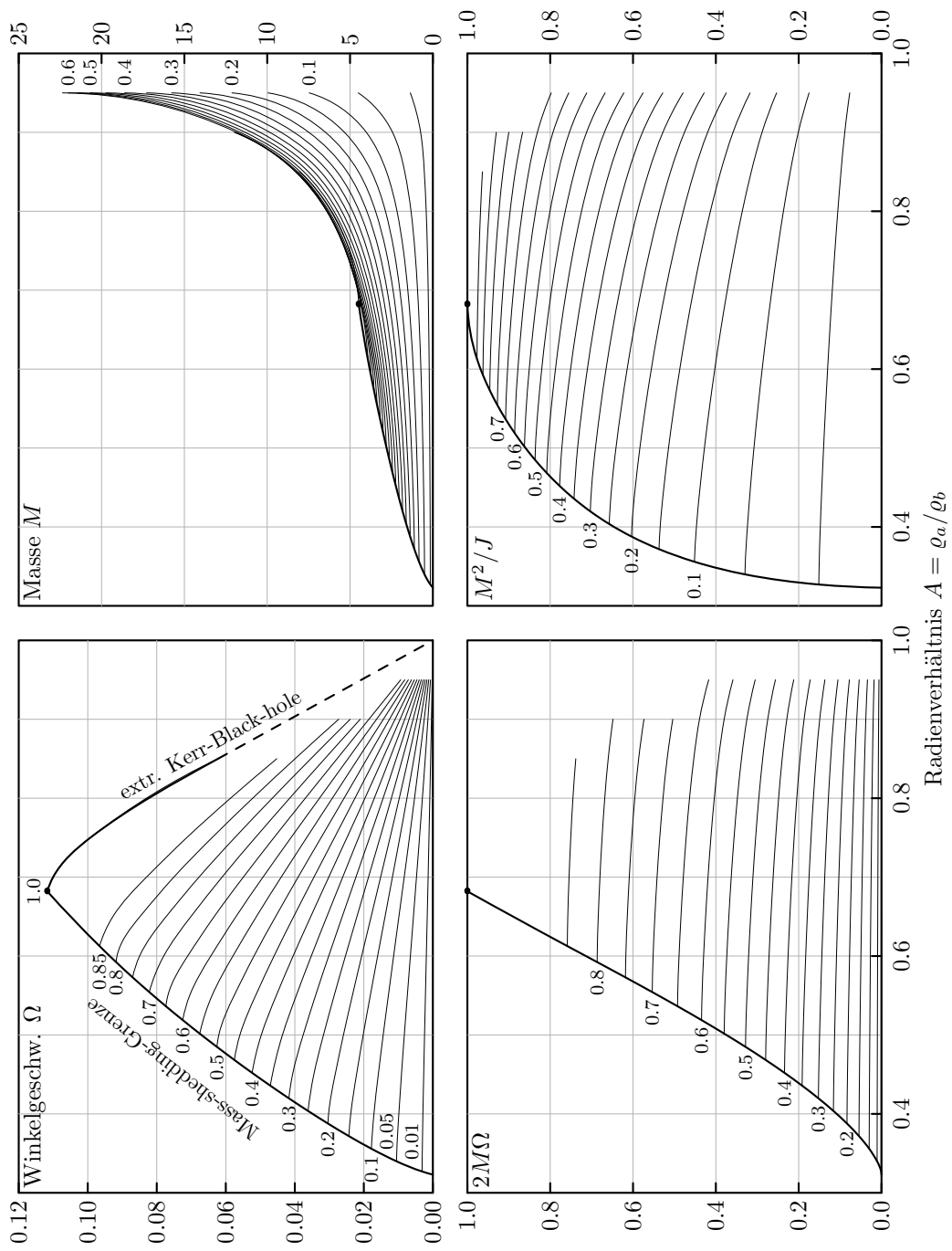


Abbildung 4.3: Parameterbereich für toroidale Sterne. Die dick durchgezogene Randkurve besteht aus Konfigurationen an der Mass-shedding-Grenze. Dünn eingezeichnet sind Linien konstanter Rotverschiebung, angegeben ist jeweils der Wert von $Z_0/(1+Z_0)$.

4.6 Ein physikalischer Weg zum Schwarzen Loch

Wir wollen nun exemplarisch eine spezielle Folge von ringförmigen Gleichgewichtskonfigurationen betrachten, die im Grenzfall in einem Schwarzen Loch endet.

Wir bleiben bei der CHANDRASEKHAR-Zustandsgleichung und betrachten Sterne mit konstanter baryonischer Masse M_0 , d.h. die Konfigurationen einer solchen Sequenz bestehen aus derselben Teilchenzahl.

Um eine solche Sequenz zu durchlaufen, muß aber noch ein anderer Parameter variiert werden. Obwohl wir keine Magnetfelder in unser Modell einbezogen haben, ist „magnetische Bremsung“ durchaus ein möglicher Prozeß zur notwendigen Verringerung von Drehimpuls und Masse. Abgesehen von solchen Effekten sind die Konfigurationen im Gleichgewicht, der Übergang zum Schwarzen Loch kann damit quasistationär ablaufen.

Die Abbildungen 4.4 bis 4.6 zeigen einen solchen quasistationären Übergang zur extremen KERR-Lösung. Die Wahl von $M_0 = 8$ für die baryonische Masse ist willkürlich, jedoch ist $M_0 > 7.86$ zu wählen, damit die Sequenz nicht vorzeitig an die Mass-shedding-Grenze stößt. Nach oben gibt es keine Grenze. $M_0 = 8$ entspricht etwa 24 Sonnenmassen. Das Schwarze Loch hat dann eine gravitative Masse von $M = 4.56$, also etwa 13.7 Sonnenmassen, die relative Bindungsenergie $(M_0 - M)/M_0$ beträgt etwa 43%.

Die explizite Vorgabe von M_0 im AKM-Verfahren ist relativ schwierig, denn hierzu mußte eine schnelle und hinreichend genaue Integrationsroutine für das in Abschnitt 2.2.1 aufge-

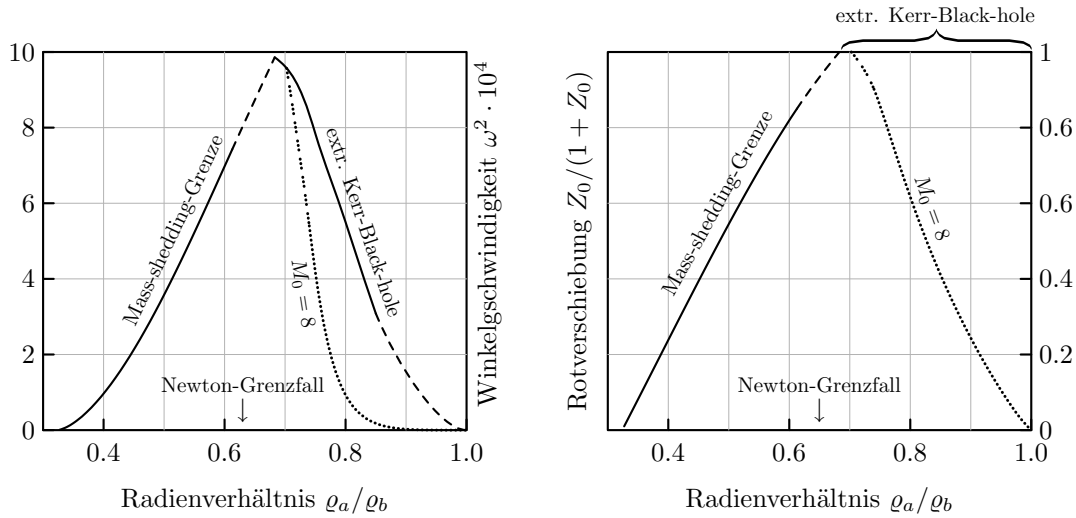


Abbildung 4.4: Parameterbereich (Radienverhältnis und Winkelgeschwindigkeit $\omega^2 = \Omega^2/4\pi$) für toroidale Sterne. Im Bereich stark relativistischer Sterne wurden die Kurven extrapoliert (gestrichelte Linien). Jedoch läßt sich der Grenzfall des Schwarzen Loches mit einer angepaßten Programmversion wieder behandeln. Die gepunktete Linie beschreibt einen parametrischen Übergang zum Schwarzen Loch bei konstanter baryonischer Masse $M_0 = 8$.

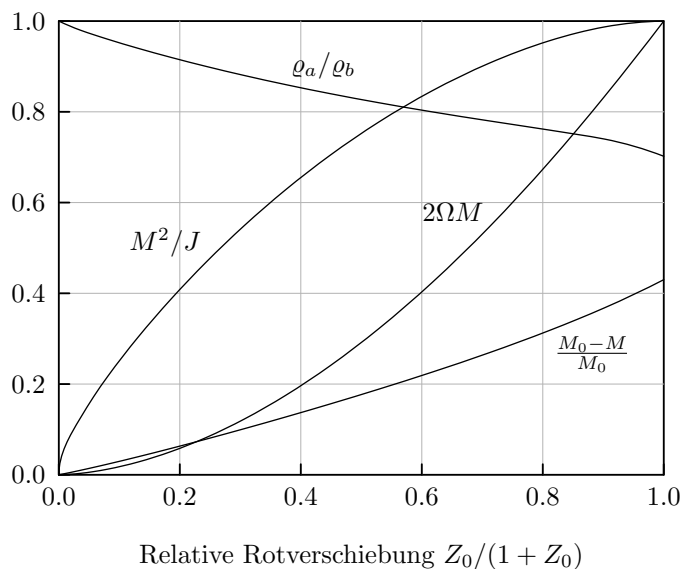


Abbildung 4.5: Übergang zum Schwarzen Loch bei konstanter baryonischer Masse $M_0 = 8$.

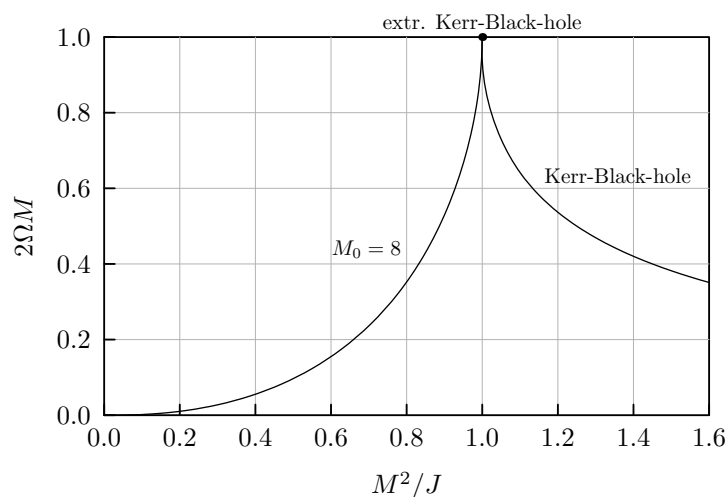


Abbildung 4.6: $2\Omega M$ als Funktion von M^2/J bei der KERR-Lösung und beim Übergang zum Schwarzen Loch bei konstanter baryonischer Masse $M_0 = 8$. Vgl. Fig. 2 aus [17].

führte Massen-Integral implementiert werden.

Die Parameter M^2/J und $2\Omega M$ laufen beide nach 1. Der Übergang zum Schwarzen Loch bzgl. dieser Kenngrößen ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Die ringförmigen Sterne und die rotierenden Schwarzen Löcher vereinigen sich im gemeinsamen Grenzfall der extremen KERR-Lösung. Abbildung 4.7 zeigt die Querschnitte und die Formierung der Ergoregionen auf diesem Weg zum Schwarzen Loch. Sowohl im NEWTONschen Grenzfall ($Z_0 = 0$)

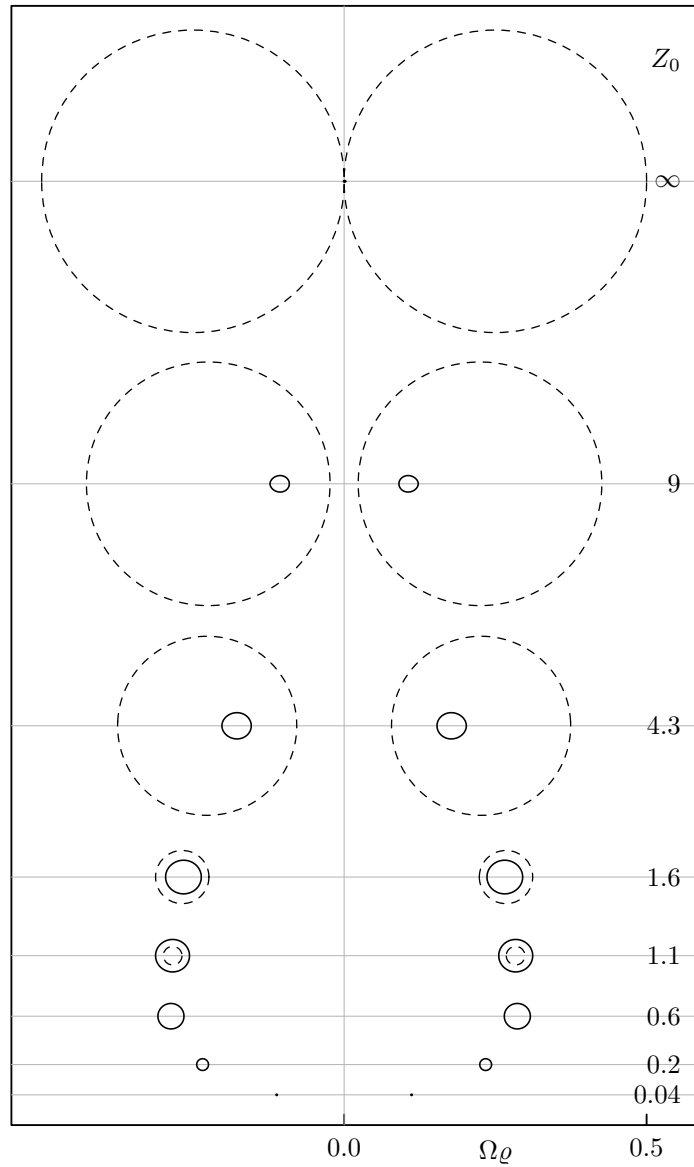


Abbildung 4.7: Querschnitte und Ergosphären beim Übergang zum Schwarzen Loch.

also auch beim Schwarzen Loch ($Z_0 = \infty$) verschwindet die Konfiguration in den angegebenen Koordinaten im Ursprung. Die Ergosphäre nimmt schließlich ihre für die extreme KERR-Lösung charakteristische Form an, vgl. Abschnitt 4.2.

KAPITEL 5

Parallelisierung

Zunächst untersuchen wir die Komplexität des AKM-Verfahrens in bezug auf Rechenzeit und Speicherbedarf in Abhängigkeit von der Entwicklungsordnung der CHEBYSHEV-Approximationen.

Nach einer Diskussion über mögliche Optimierungen befassen wir uns mit der Parallelisierung des Programms, damit es auf Cluster-Rechnern effizient einsetzbar wird. Dabei werden die relevanten Konzepte kurz angegeben und die erzielten Ergebnisse dargestellt.

5.1 Komplexitätsanalyse des AKM-Verfahrens

Zentraler Bestandteil der AKM-Methode ist ein NEWTON-RAPHSON-Verfahren zur Lösung eines hochdimensionalen nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems. Wir erinnern an die in Abschnitt 1.2.4 eingeführte Iteration

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^{(n)}) \right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}),$$

die so oft wiederholt wird, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Dazu muß die JACOBI-Matrix $A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x})$ erstens berechnet und zweitens invertiert werden. Das Ausführen des Iterationsschrittes selbst ist demgegenüber vergleichsweise wenig aufwendig. Daher empfiehlt es sich, mit ein und derselben Matrix A^{-1} mehrere Iterationsschritte durchzuführen, solange sich dabei die Lösung verbessert, also $\|\vec{f}(\vec{x})\|$ kleiner wird. Wir verwenden üblicherweise die Maximum-Norm, wobei die einzelnen Komponenten von \vec{f} , also die punktweise ausgewerteten Gleichungen, sinnvoll skaliert werden müssen. Dazu ist das asymptotische Verhalten zu berücksichtigen, um die zum Verschwinden zu bringenden Terme in dieselbe Größenordnung zu bringen (beispielsweise in Potenzen von $r = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}$ ausgedrückt).

Für die folgenden Betrachtungen führen wir in der nachstehenden Tabelle Variablen ein, die das Skalierungsverhalten des Problems beschreiben. Wir beschränken uns auf den axialsymmetrischen Fall, wir haben also pro Gebiet drei metrische Funktionen, die von zwei Koordinaten abhängen.

Variable	Bedeutung	Größe
m	Entwicklungsordnung (Anzahl der CHEBY-SHEV-Koeffizienten pro Dimension)	ca. 6...30
g	Anzahl der Gebiete	2...5
n	Anzahl der Variablen bzw. Gleichungen	$3gm^2 + 3(g-1)m + 2$

5.1.1 Berechnung der JACOBI-Matrix

Die JACOBI-Matrix wird durch den Differenzenquotienten

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \right)_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\vec{x}) \approx \frac{f_k(\vec{x} + \epsilon \vec{e}_i) - f_k(\vec{x} - \epsilon \vec{e}_i)}{2\epsilon}$$

approximiert. Dies erfordert das n -malige Auswerten der Funktion \vec{f} . Zur Speicherung der JACOBI-Matrix müssen $n^2 \approx 9g^2m^4$ Fließkommazahlen im Arbeitsspeicher untergebracht werden.

5.1.2 Berechnung des Vektors $\vec{f}(\vec{x})$

Aus dem gegebenen Variablenvektor \vec{x} sind zunächst die Koeffizienten der Oberfläche, der einzelnen Potentiale und deren Randfunktionen zu extrahieren und in entsprechenden Datenstrukturen unterzubringen. Als nächstes sind die gemeinsamen Randfunktionen an der Oberfläche zwischen Innen- und Außengebiet bzgl. der unterschiedlichen Metriken gemäß (3.2) umzurechnen.

Nun können in jedem Gebiet die Feldgleichungen und die Normalenableitungen der metrischen Funktionen an den Gebietsgrenzen berechnet werden.

Dann werden die Differenzen der Normalenableitungen benachbarter Gebiete sowie zuletzt die zwei notwendigen Parametervorgaben für den Stern als zu erfüllende Gleichung formuliert.

Aus Sicht der Komplexität spielt hier nur die Zeit für die Berechnung der Feldgleichungen und Normalenableitungen in den einzelnen Gebieten eine wesentliche Rolle. Wir wollen dies etwas genauer analysieren. Die dabei häufig verwendeten CHEBYSHEV-Routinen sind aus [22] entnommen (Zeitkomplexität für ein- und zweidimensionale Entwicklungen angegeben):

Symbol	Bedeutung der Routine	Zeitkomplexität
EVAL	Auswertung der CHEBYSHEV-Entwicklung an einer Stelle	$O(m)$ bzw. $O(m^2)$
CT	CHEBYSHEV-Transformation: Berechnen der Koeffizienten aus den Funktionswerten an den Gitterstellen	$O(m^2)$ bzw. $O(m^4)$
DIFF	Spektrale Differentiation	$O(m)$ bzw. $O(m^2)$
INT	Spektrale Integration	$O(m)$ bzw. $O(m^2)$

Zu gegebenen metrischen Potentialen, deren Randfunktionen und gegebener Oberflächenfunktion g verläuft die Berechnung der Feldgleichungen und Normalenableitungen in jedem Gebiet typischerweise wie in Abbildung 5.1 dargestellt. Bei der Koordinatentransformation werden aus den Gitterpunktskoordinaten (s, t) im Einheitsquadrat die zugehörigen Koordinaten (ρ, ζ) und deren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung nach s und t berechnet. Da hierbei die Oberflächenfunktion g ausgewertet werden muß, beträgt die Rechenzeit $O(m)$.

In Außengebieten kann die Berechnung von κ (wäre analog zu k) entfallen, da die drei Feldgleichungen für W , v und ω nicht von κ abhängen.

Die Feldgleichungen in den einzelnen Gebieten hängen nur von den jeweiligen Potentialen in diesem Gebiet, den Randfunktionen und Vorgaben ab. Haben der Variablenvektor und das Gleichungssystem die Gestalt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \text{je } 3m^2 & \text{Koeffizienten für Potentiale in jedem Gebiet} \\ (3(g-1)-1)m & \text{Koeffizienten für Randfunktionen}^1 \\ m & \text{Koeffizienten für Oberflächenfunktion}^2 \\ 2 & \text{freie Variablen (meist } V_B \text{ und } \Omega) \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \text{je } 3m^2 & \text{Feldgleichungen an den Gitterpunkten in jedem Gebiet} \\ 3(g-1)m & \text{Bedingungen für die Stetigkeit der Normalenableitungen} \\ 2 & \text{Parametervorgaben (z. B. Masse und Drehimpuls)} \end{pmatrix},$$

¹Beachte, daß es $g-1$ gemeinsame Ränder gibt, aber an der Oberfläche $V = V_B$ konstant ist, d.h. eine Randfunktion entfällt.

²Die Oberfläche wird durch die Radien ρ_a und ρ_b , sowie $m-2$ CHEBYSHEV-Koeffizienten dargestellt.

DIFF(Potentiale nach s, ss, t, tt, st)	$O(m^2)$
An jedem Gitterpunkt:	m^2
Koordinatentransformation	$O(m)$
EVAL(Potentiale und deren Ableitungen)	$O(m^2)$
$k_{ p}$ und $k_{ \zeta}$ berechnen (siehe (3.6))	$O(1)$
$k_{ t}$ berechnen	$O(1)$
CT($k_{ t}$)	$O(m^4)$
An jedem Gitterpunkt eines Randes:	m
EVAL(Potentiale und deren Ableitungen)	$O(m^2)$
Randwert k_0 für $k_{ t}$ berechnen (siehe (3.8))	$O(1)$
CT(k_0)	$O(m^2)$
INT($k_{ t}$ nach t mit Randwerten k_0)	$O(m^2)$
An jedem Gitterpunkt:	m^2
Koordinatentransformation	$O(m)$
EVAL(Potentiale und deren Ableitungen)	$O(m^2)$
EVAL(k)	$O(m^2)$
Druck und Dichte berechnen	$O(1)$
Feldgleichungen aufstellen (s. (3.4))	$O(1)$
An jedem Gitterpunkt der Ränder:	m
Koordinatentransformation	$O(m)$
EVAL(Potentiale und deren Ableitungen)	$O(m^2)$
Normalenableitungen berechnen	$O(1)$

Abbildung 5.1: Berechnung der Feldgleichungen und Normalenableitungen in einem Gebiet und zugehörige Rechenzeit.

so ist die JACOBI-Matrix fast blockdiagonal:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{Gebiet 1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\text{Gebiet } g} & \\ \boxed{\text{Normalenableitungen, Vorgaben}} & & & \end{pmatrix}$$

5.1.3 Matrixinversion

Nun muß die JACOBI-Matrix invertiert werden. Aufgrund der hohen Matrixdimension sind für die numerische Stabilität besondere Vorkehrungen zu treffen. Es wird ein GAUSS-JORDAN-Eliminationsverfahren ausgeführt und dabei vollständig pivotisiert. D. h. welche Zeile und Element bzgl. dessen eliminiert wird, wird durch das absolut größte Element bestimmt. Bei einer Matrixdimension n müssen n Eliminationsschritte ausgeführt werden. Pro Schritt muß unter den n^2 Matrixelementen das Größte gesucht werden und anschließend $n - 1$ Zeilen der Länge n eliminiert werden. Das sind insgesamt $O(n^3)$ Operationen.

Eine mögliche Implementierung findet man in [22]. Sie hat gegenüber vielen anderen Bibliotheksroutinen eine Reihe Vorteile:

- Es wird die inverse Matrix zurückgegeben (nicht nur ein lineares Gleichungssystem gelöst), was die Möglichkeit schafft, diese Matrix mehrfach anzuwenden (siehe oben).
- Es wird während der Rechnung kaum zusätzlicher Speicher gebraucht, die Matrix wird mit ihrer Inversen überschrieben.
- Der Code ist direkt zugänglich (nicht innerhalb von Bibliotheken) und kann so leicht angepaßt werden. Beispielsweise läßt sich die spezielle Matrixstruktur berücksichtigen, indem man triviale Berechnungen der Form $\vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$ wegläßt.
- Zum anderen besteht die Möglichkeit der Parallelisierung.

Andererseits ist dieser Code mit Sicherheit nicht die optimale Lösung, vor allem sollte man fremden Programmen nicht blind vertrauen, wie der folgende Effekt zeigt. Bei der praktischen Analyse der Rechenzeit für die Matrixinversion ergab sich im Bereich $n \leq 1500$ mit leichten Schwankungen etwa das Zeitverhalten n^3 . Es folgte ein starker Anstieg und ab $n = 3000$ ein Verhalten wie $n^{3.7}$, siehe obere Kurve in Abbildung 5.2.

Solche Effekte sind in der praktischen Numerik durchaus bekannt und hängen mit der Hardware zusammen.³ Die Ursache ist aber rein physikalischer Natur. Bei heutigen Taktraten um die 2 GHz beträgt der während eines Taktes verfügbare Informationsweg (maximal mit Lichtgeschwindigkeit) höchstens 15 cm und somit weniger als der physikalische Abstand zwischen Prozessor (CPU) und Hauptspeicher (RAM)! Um trotzdem solche Taktraten zu ermöglichen, werden Teile des RAMs zusätzlich in der CPU selbst gespeichert. Dabei werden die Ergebnisse früherer Operationen im Prozessor im sogenannten Cache abgelegt. Wir wollen auf das inzwischen sehr ausgefeilte mehrstufige System der Cache-Verwaltung nicht weiter eingehen, aber anmerken, daß im Cache nicht beliebige RAM-Daten gespeichert werden können, sondern nur gewisse zusammenhängende Speicherblöcke, denn die Daten müssen ja in der Größenordnung eines Prozessortaktes wiedergefunden werden.

³Es handelt sich aber trotzdem um einen prinzipiellen Effekt, da sich nahezu exakt das gleiche qualitative Verhalten bei Verwendung stark unterschiedlicher Maschinen, Compiler und Betriebssysteme zeigt.

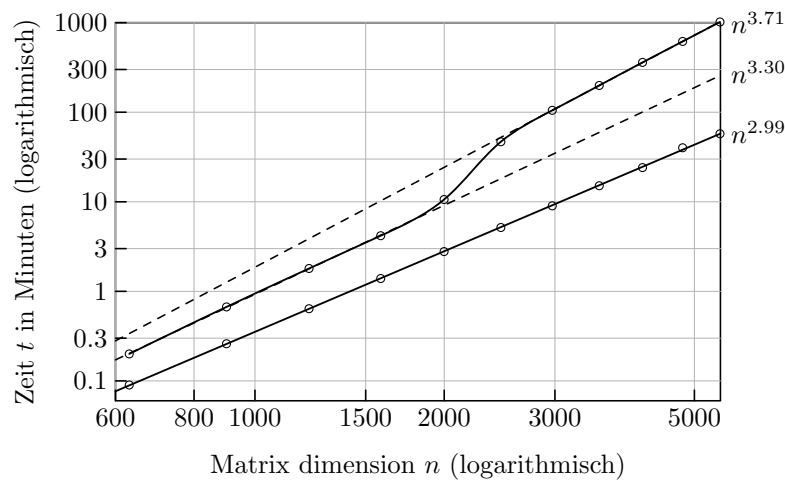


Abbildung 5.2: Experimentell bestimmter Zeitbedarf für Inversion von Matrizen mit dem originalen und verbesserten Code aus [22].

Was bedeutet dies nun für uns? Zweidimensionale Felder (Matrizen) werden spalten- oder zeilenweise im linearen RAM abgelegt. Dadurch sind Zeilen und Spalten nicht mehr gleichberechtigt. Das kann dazu führen daß beispielsweise Spalten im Cache gespeichert werden können, aber Zeilen nicht. Daneben gibt es aber auch eine Vielzahl anderer relevanter Effekte beim Speicherzugriff (sog. paging). Festzuhalten bleibt: Die Reihenfolge der Matrixindizes kann wichtig sein!

Tatsächlich hatte gleich der erste Versuch, nämlich in der Fortran-Routine die Feldindizes zu vertauschen, durchschlagenden Erfolg. Der Code wurde so modifiziert, daß die Laufvariable der innersten Schleifen stets über den ersten Feldindex (und damit sequentiell im Speicher) läuft.⁴ Nun zeigt sich wirklich eine perfekte n^3 -Abhängigkeit (Abbildung 5.2 untere Kurve). Bei kleineren Matrixdimensionen ergibt sich eine Beschleunigung um Faktor 3, ab $n = 3000$ Faktor 10 und ab 6000 schon Faktor 20, Tendenz steigend!

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch kurz die Frage aufgeworfen werden, ob $O(n^3)$ eine untere Zeitschranke für die Inversion (dichter) Matrizen ist. Obwohl quasi alle praktischen Algorithmen in $O(n^3)$ arbeiten, lautet die Antwort nein. Mit einem Teile-und-Hersche-Algorithmus ist $O(n^{\log_2 7} \approx n^{2.8})$ realisierbar ([22, Kap. 2.11]). Jedoch muß man bei solchen Verfahren Abstriche bei der Pivotisierung oder Parallelisierung machen, so daß man einen eventuellen Gewinn mit Instabilität bezahlt.

⁴Man beachte, daß Fortran und C gemäß ANSI-Konvention Felder unterschiedlich speichern, es gilt bzgl. der Speicherzuordnung $a(i, j) \equiv a[j-1][i-1]$. Entsprechend sind die C-Routinen in [22] in Ordnung.

5.1.4 Optimierungsmöglichkeiten

An dieser Stelle wollen wir einige Verbesserungsmöglichkeiten zur Verkürzung der Rechenzeit angeben, die z. T. schon realisiert sind oder gerade umgesetzt werden. Darüberhinaus gibt es sicherlich noch viel Optimierungspotential, was man sich aber mit viel Aufwand und Unübersichtlichkeit des Codes erkauft, ohne wesentlichen Gewinn zu erzielen. Da die Rechenzeit für die Matrixinversion etwa die Hälfte der Gesamtzeit ausmacht, sind reine Verbesserungen am physikalischen Teil, d. h. bei der Berechnung von $\vec{f}(\vec{x})$ kaum lohnenswert. Spätestens mit Einsatz der Fast-Chebyshev-Transformationen spielt nur noch die Matrixinversion eine Rolle. Nun zu den Verbesserungsmöglichkeiten.

- Anstelle der Differenzenquotienten zweiter Ordnung kann man zur Berechnung der JACOBI-Matrix mehr Stützstellen heranziehen, und über eine CHEBYSHEV-Entwicklung die Ableitung bestimmen. In bestimmten Grenzsituationen führt die höhere Genauigkeit zu höherer Stabilität. Praktisch ergaben sich dabei jedoch selten solche großen Vorteile (z. B. größere Sprünge bei den Vorgabeparametern), die den zusätzlichen Rechenaufwand kompensieren oder rechtfertigen würden.
- Wie schon diskutiert, ist die JACOBI-Matrix fast blockdiagonal, weil sich $\vec{f}(\vec{x})$ und $\vec{f}(\vec{x} + \varepsilon \vec{e}_i)$ meist nur in einem Gebiet und den zugehörigen Normalenableitungen sowie Parametervorgaben unterscheiden. D. h. der Algorithmus aus Abbildung 5.1 muß (für $1 \leq i \leq 3gm^2$) nur für jeweils ein Gebiet aufgerufen werden. Das liefert einen Gewinn um Faktor den g , was in der Praxis auch gut funktioniert hat.

Bei der Inversion führt das simple Vermeiden trivialer Operationen zu einer Beschleunigung um knapp den Faktor $2g/(g+1)$.

- Die meiste Rechenzeit wird dazu verwendet, zweidimensionale CHEBYSHEV-Auswertungen an jeweils m^2 Gitterpunkten durchzuführen. Ebenso ist die CHEBYSHEV-Transformation für $k_{|t}$ aufwendig. Bedenkt man jedoch, daß alle notwendigen Funktionswerte nur an den Gitterpunkten (Nullstellen der CHEBYSHEV-Polynome) ausgewertet werden, kann man auch mit eindimensionalen Routinen auskommen. Als Unbekannte nehmen wir die Funktionswerte an den Gitterstellen anstatt der CHEBYSHEV-Koeffizienten. Zur Berechnung der t -Ableitung an allen Gitterpunkten transformiert man zunächst eine Reihe mit fester s -Koordinate ($O(m^2)$), differenziert ($O(m)$) und transformiert zurück ($O(m^2)$). Das ganze wird mit m solchen Reihen durchgeführt, also insgesamt $O(m^3)$ Operationen. Ähnlich wird mit der Integration von $k_{|t}$ verfahren, da hier auch ursprünglich die Funktionswerte vorliegen.
- Durch den Einsatz von Fast-Chebyshev-Transformationen (FCT) reduziert sich die Rechenzeit für eine (eindimensionale) Transformation von $O(m^2)$ auf $O(m \log m)$. Jedoch muß die Entwicklungsordnung m eine Zweierpotenz sein, ansonsten ist der Gewinn kleiner (m wird auf die nächste Zweierpotenz aufgerundet). Zu Details und entsprechenden Bibliotheken sei auf [36] verwiesen.

- Die Koordinatentransformation läßt sich in $O(1)$ durchführen, wenn man die Oberflächenfunktion g vorher einmalig an den relevanten Stützstellen auswertet ($O(m^2)$ bzw. $O(m \log m)$ mit FCT).
- Die Verwendung von fertigen Bibliotheken bei der Matrixinversion kann insbesondere durch Nutzung neuerer Hardware-Funktionen die Rechenzeit erheblich verkürzen. Das ist jedoch im Falle von Parallelversionen mit erheblichem Aufwand verbunden und geht stark zu Lasten der Übersichtlichkeit. Zum anderen pivotisieren manche Algorithmen nur eingeschränkt bzw. geben nicht (oder nicht direkt) die inverse Matrix zurück, sondern lösen nur einmalig ein lineares Gleichungssystem.
- Eine weitere Optimierungsmöglichkeit besteht darin, die JACOBI-Matrix nicht exakt (zumindest algorithmisch gesehen) invertieren zu wollen, sondern mit Näherungslösungen auszukommen. Dies wird in trivialster Form durch die mehrfache Verwendung derselben Matrix im NEWTON-RAPHSON-Verfahren schon erfolgreich praktiziert. Zur Matrixinversion gibt es dann verschiedene iterative Algorithmen, die auf Basis einer Präkonditionierung die inverse Matrix annähern.

5.1.5 Gesamtüberblick über die notwendigen Ressourcen

Zusammenfassend geben wir eine kurze Übersicht der Komplexität des Programms in der Originalfassung sowie mit den angesprochenen Optimierungen (beachte dabei $n \approx 3gm^2$).

Programmteil	Zeitbedarf	Speicherbedarf
Vektor $\vec{f}(\vec{x})$ berechnen	$O(gm^4)$	$O(n)$
optimiert	$O(m^2 \log m)$	
JACOBI-Matrix berechnen	$2n \cdot O(gm^4) = O(g^2m^6)$	n^2
optimiert	$O(gm^4 \log m)$	
JACOBI-Matrix invertieren	$O(n^2) = O(g^2m^6)$	n^2

5.2 Parallelisierung

5.2.1 Cluster-Computer

Heutige Hochleistungscomputer werden zunehmend als Cluster-Rechner aufgebaut. D. h. viele Einzelrechner (Knoten) bearbeiten ein Programm. Dazu muß aber das Problem in kleinere Teile zerlegt werden, die lokal mit jeweils nur einem Teil der Gesamtdaten berechnet werden können. Datenaustausch zwischen einzelnen Knoten ist zwar möglich, aber natürlicherweise viel langsamer als der Datenfluß innerhalb eines Knotens.

Man unterscheidet homogene und heterogene Cluster. Erstere sind aus identischen Knoten aufgebaut und eigens für rechenintensive Numerik konzipiert. Der Vorteil besteht in deutlich einfacher zu realisierender Parallelisierung der Algorithmen und gut zu kontrollierenden

Rechen- und Kommunikationszeiten. Heterogene Cluster bestehen aus vielen unterschiedlichen Rechnern, häufig mit dem Ziel vorhandene Rechentechnik (die üblicherweise deutlich über 90% Leerlauf aufweist) für rechenintensive Anwendungen nutzbar zu machen. Effiziente Parallelisierung und Ressourcenmanagement sind sehr viel schwieriger, da die freien Kapazitäten stark verschieden sind und zudem zeitlich schwanken können.

5.2.2 Parallelisierung des AKM-Verfahrens mittels MPI

MPI – kurz für Message-Passing-Interface, stellt eine Reihe von Routinen zum Datenaustausch zwischen einzelnen Knoten bereit. Grundidee ist es, ein und dasselbe Programm auf jedem Knoten laufen zu lassen. Damit das Programm trotzdem auf jedem Knoten unterschiedlich reagieren kann, sind die Knoten durchnummeriert und jede Instanz hat die Möglichkeit diese Nummer abzufragen und entsprechend zu verfahren. Es gibt sowohl Routinen, um Daten zwischen einzelnen Knoten auszutauschen, als auch solche, die in komfortabler Weise Daten an alle anderen Knoten versenden. Für Fortran und C gibt es verschiedene MPI-Implementationen [34], [35]. Aufgrund der guten Standardisierung und guten Dokumentationen [33] ist es recht einfach, diese Bibliotheken zu verwenden. Die Hauptarbeit bleibt die Parallelisierung der algorithmischen Struktur der Programme.

Im Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit wurde ein Parallelisierungskonzept für homogene Cluster erarbeitet und dieses auf einige Programmversionen für axialsymmetrische Sterne nach dem AKM-Verfahren angewendet. Gerechnet wurde auf dem 9 Knoten umfassenden (Mini-)Cluster des Instituts für Technische Informatik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. An dieser Stelle soll das Algorithmische Konzept erläutert werden, technische Details der Implementierung sind im Anhang B zu finden.

Die Spalten der JACOBI-Matrix werden gleichmäßig aufgeteilt den Knoten zugeordnet. Jeder Knoten kann dann unabhängig von den anderen seine Spalten ausrechnen. Da außer dem einmaligen Verteilen des Variablenvektors \vec{x} und der Vorgabeparameter keine weitere Kommunikation anfällt, ist dieser Teil durch nahezu ideale Ressourcenskalierung geprägt. Neben der Rechenzeit wird insbesondere auch der Speicherbedarf gleichmäßig verteilt. Man könnte diesen Teil der Rechnung sogar problemlos auf heterogene Cluster übertragen, indem man die Spalten nicht gleichmäßig verteilt.

Dagegen ist die parallele Berechnung der inversen Matrix kommunikationsintensiver und schwieriger umzusetzen. Bei der Bestimmung des Pivotelementes sucht zunächst jeder Knoten in seinen Spalten das Maximum. Anschließend läßt sich das Gesamtmaximum direkt mit einer fertigen MPI-Funktion ermitteln.

Danach wird die Pivotspalte an alle Knoten verteilt. Bei den anschließenden Zeilensubtraktionen berechnet jeder Knoten nur seinen relevanten Teil der jeweiligen Zeile.

Da die Pivotelemente nicht auf der Hauptdiagonale liegen, muß die Matrix am Ende noch umsortiert werden. Dies kann aber auch lokal geschehen, da nur Zeilen getauscht werden müssen.

Desweiteren mußten die Matrix-Vektor-Multiplikation sowie einige Ein- und Ausgabe-Routinen an die Parallelverarbeitung angepaßt werden.

5.2.3 PBS, Job-Skripte und Ansteuerung

Um Cluster effizient nutzen zu können, werden Programme nicht direkt, sondern als Jobs über einen Ressourcen-Manager gestartet. In unserem Fall war dies das Portable-Batch-System (PBS), welches über ein Job-Skript für jeden Auftrag gesteuert wird.

Bei der Umsetzung ist darauf zu achten, daß während des Programmlaufs keine Interaktion mit dem Anwender möglich ist, d. h. alle Parameter für den Programmlauf vorher festgelegt sein müssen. Dafür wurde eine Schnittstelle geschaffen, die der originalen Menüführung des Programms nachempfunden wurde und zusätzliche Parameter und Informationen zur Konvergenz des Verfahrens bereitstellt. Somit ist es leicht möglich, beispielsweise ganze Parameter-Sequenzen von Sternen mit adaptiver Schrittweite zu berechnen.

5.3 Auswertung

Wir wollen den tatsächlichen Zeit- und Speicherbedarf sowie die Ergebnisse der Parallelisierung anhand eines repräsentativen Beispiels aufzeigen. Es handelt sich dabei um die Berechnung der Kern-Ring-Sequenz der ersten verallgemeinerten Kern-Ring-Klasse homogener Sterne, siehe Abbildung 4.2 (j)–(k). Die dabei berechneten Daten sind Bestandteil der Veröffentlichung [3].

Aufgrund des zusätzlichen Kerns gibt es zwei Innengebiete und damit insgesamt $g = 5$ Gebiete. Bei einer Entwicklungsordnung von $m = 22$ ergeben sich 7525 Variablen. Die folgende Tabelle stellt die dazu nötigen Ressourcen zusammen. Zum Vergleich sind diese auch für den in [23] sehr genau berechneten axialsymmetrischen Stern sphäroidaler Topologie angegeben.⁵

	Kern-Ring-Abschnürung	Sphäroidaler Stern
Zahl g der Gebiete	5	2
Entwicklungsordnung m	22	30
Zahl n der Variablen	7525	5491
Speicherbedarf	432 MB	230 MB
Rechenzeit für		
JACOBI-Matrix	57 min	52 min
Inversion	78 min	27 min

⁵Die Zeitangaben beziehen sich auf genau eine Matrix-Berechnung und -Inversion auf einem PC mit 2.4 GHz Intel-Pentium-4 CPU.

Auf dem Cluster mit 8 Prozessoren mit je 2 GHz ergaben sich für die Kern-Ring-Einschnürung folgende Rechenzeiten:

	Einzelrechner	8 Rechner	Faktor
JACOBI-Matrix	67.8 min	8.5 min	7.98
Inversion	97.3 min	15.2 min	6.40
Summe	165 min	23.7 min	6.97

Unter idealen Bedingungen (keine weiteren Prozesse und optimal funktionierendes Netzwerk) ist eine relativ gute Skalierung bzgl. der Rechenzeit möglich. Hinzukommt, daß der Speicherbedarf aufgeteilt wird.

Ausblick

*Die Naturwissenschaft gleicht einem gewaltigen Kreuzworträtsel,
dessen Reihen und Spalten schneller wachsen,
als sie gelöst werden können.*

HEINZ HABER (1913-1990)

Wir haben uns mit der Phänomenologie von axialsymmetrisch stationären Lösungen der EINSTEIN-Feldgleichungen beschäftigt. An die Ergebnisse dieser Arbeit schließen sich eine Reihe offener Fragen an, die bereits Gegenstand weiterer eingehender Untersuchungen sind.

1. Kann man auf analytischem Wege den Übergang von Ringen zu Schwarzen Löchern nachvollziehen und zeigen, daß man dabei stets bei der extremen KERR-Lösung ankommt?
2. Sind die gefundenen axialsymmetrischen Lösungen stabil, und wenn nicht, wie reagieren sie auf kleine Störungen? Wie sähen dann abgestrahlte Gravitationswellen aus?
3. Wie kann man das numerische Verfahren weiter verbessern, um auch Zeitentwicklung und nicht axialsymmetrische Konfigurationen untersuchen zu können?

ANHANG A

CHEBYSHEV-Entwicklungen

Zur numerischen Approximation von Funktionen gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum einen kann man die Funktion durch Werte an festen Stützstellen beschreiben und zwischen diesen lokal interpolieren, beispielsweise mit quadratischen Funktionen bei der SIMPSON-Integrations-Regel. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, bei der Interpolation alle Stützstellen zu berücksichtigen. Jedoch führt dies bei einer polynomialen Interpolation durch äquidistante Stützstellen häufig zu unkontrolliertem Verhalten an den Intervallrändern (RUNGE-Phänomen). In Abbildung A.1 ist dies an einem einfachen Beispiel sehr klar zu erkennen.

Stattdessen kann man durch eine geeignete Wahl der Stützstellen (dichter am Intervallrand)

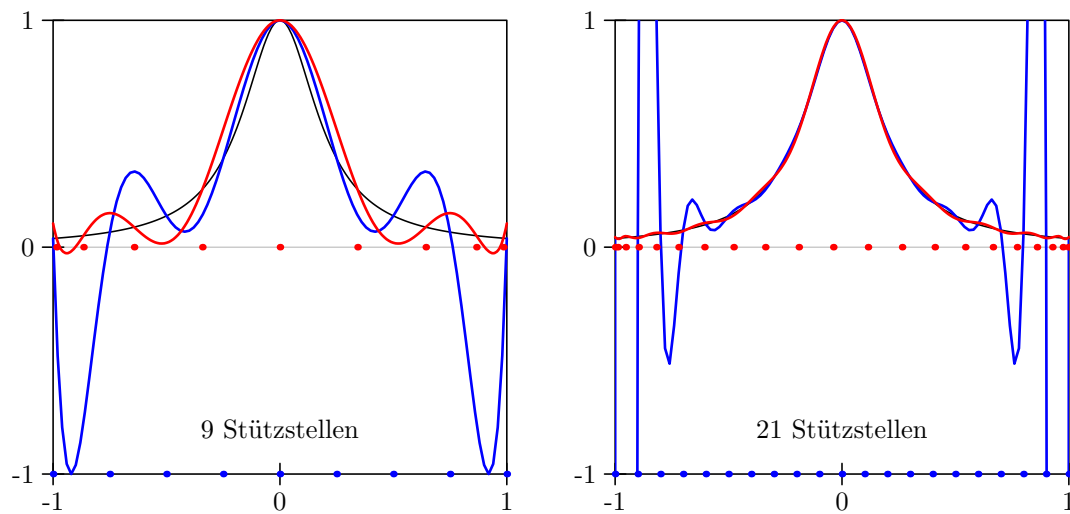


Abbildung A.1: Approximation der Funktion $f(x) = 1/(1 + (5x)^2)$ mit äquidistanten und besser angepaßten Stützstellen (Nullstellen der CHEBYSHEV-Polynome). Die Punkte markieren die Stützstellen, an denen die Approximation mit der Funktion f übereinstimmt (Mitte: Nullstellen des 9. bzw. 21. CHEBYSHEV-Polynoms, unten: äquidistant).

eine schnelle Konvergenz der Approximation erreichen. Völlig äquivalent dazu kann man dieses Verfahren auch als diskrete Entwicklung nach orthogonalen Funktionensystemen auffassen. Daher spricht man auch von *spektralen* Entwicklungen.

Für Funktionen $u \in C^k$ fallen diese Entwicklungskoeffizienten einer solchen spektralen Entwicklung gemäß

$$\hat{u}_k \sim O(n^{-k}),$$

d. h. für C^∞ -Funktionen geht $n^p \hat{u}_k \rightarrow 0$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Für quadrat-integrierte Funktionen konvergiert die Folge der m -ten Approximationen

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \hat{u}_k \psi_k$$

bzgl. eines vollständigen Orthogonalsystems (ψ_k) fast überall punktweise gegen die Funktion u . Für hinreichend glatte Funktionen läßt sich die Konvergenzgeschwindigkeit sogar folgendermaßen abschätzen

$$\max_x |u(x) - u^{(m)}(x)| \leq \sum_{k \gtrsim m} |\hat{u}_k|.$$

Für C^∞ -Funktionen konvergiert die Approximation exponentiell gegen die Ausgangsfunktion.

Während man bei periodischen Funktionen meist eine FOURIER-Zerlegung macht, empfehlen sich bei nichtperiodischen Funktionen, die auf einem Intervall (o.B.d.A. $[-1, 1]$) gegeben sind, CHEBYSHEV-Polynome. Diese sind definiert durch (beachte Fußnote 11 auf Seite 6)

$$T_k(x) = \cos(j \arccos x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1].$$

Wie in Abschnitt 1.2.3 bereits gesagt, entspricht einer Entwicklung m -ter Ordnung nach CHEBYSHEV-Polynomen eine polynomiale Interpolation $(m-1)$ -ten Grades, wobei man als Stützstellen die m Nullstellen des m -ten CHEBYSHEV-Polynoms wählt. In Abbildung A.1 ist das Konvergenzverhalten einer solchen Interpolation gut erkennbar.

Die gute Konvergenz und numerische Stabilität¹ beim Rechnen mit CHEBYSHEV-Approximationen kann man sich auch anhand einiger bemerkenswerter Eigenschaften der CHEBYSHEV-Polynome vergegenwärtigen.

- $T_k(x)$ ist ein Polynom k -ten Grades und hat k Nullstellen im Intervall $[-1, 1]$.
- Es gilt $T_k(x) \in [-1, 1]$. An allen Extremstellen (zwischen den Nullstellen) werden die Funktionswerte 1 bzw. -1 angenommen. Die CHEBYSHEV-Polynome füllen das Gebiet $[-1, 1]^2$ gewissermaßen gut aus, im Gegensatz zu den Monomen x^n im gleichen Gebiet.

¹Es ist durchaus vorstellbar, daß eine Entwicklung mit äquidistanten Stützstellen wie in Abbildung A.1 punktweise – nicht aber gleichmäßig – konvergiert. Jedoch sind die bei der Auswertung einer solchen Darstellung vorkommenden großen Zahlen numerisch sehr problematisch.

- Die Entwicklungskoeffizienten c_k sind gleichmäßig beschränkt, es gilt

$$|c_k| \leq \frac{4}{\pi} \max_{x \in [-1, 1]} |u^{(m)}|.$$

Sie sind (wegen $u \approx u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k T_k$) also nicht wesentlich größer als der Wertebereich der Funktion u selbst. In Verbindung mit der Beschränktheit der T_k garantiert dies eine hohe numerische Stabilität.

- Die Entwicklung einer Funktion f nach CHEBYSHEV-Polynomen konvergiert gleichmäßig, falls f stetig und stetig differenzierbar ist, d. h. $f \in C^1[-1, 1]$.
- Der Approximationsfehler läßt sich folgendermaßen abschätzen [15]:

$$\left| f(x) - u^{(m)}(x) \right| \leq \frac{2(b-a)^{m+1}}{4^{m+1}(m+1)!} \max_{y \in [a, b]} \left| f^{(m+1)}(y) \right|.$$

Wenn man beispielsweise $\cos(x)$ im Intervall $[0, 1]$ durch ein CHEBYSHEV-Polynom $u^{(m)}$ vom Grad m approximiert, so gilt

$$|\cos(x) - u^{(m)}(x)| \leq \frac{2}{4^{m+1}(m+1)!}.$$

Bei $m = 5$ beträgt die Genauigkeit etwa 6 Dezimalstellen, bei $m = 10$ schon 13 Stellen.

Es gibt eine ganze Reihe weiterer Eigenschaften, z. B. Best-Approximations-Kriterien, die die CHEBYSHEV-Polynome erfüllen. Dazu sei auf weiterführende Literatur verwiesen, beispielsweise [10], [15].

ANHANG B

Nähere Angaben zum Programm

Die verschiedenen Programme zur Berechnung axialsymmetrischer Sterne wurden in FORTRAN (im wesentlichen Fortran77-konform) größtenteils von MARCUS ANSORG geschrieben. Das Programm zur Berechnung sphäroidaler Sterne wurde im Rahmen dieser Arbeit für verschiedene Zustandsgleichungen erweitert und modularisiert in Fortran90-Standard umgeschrieben. Dadurch wird es erheblich übersichtlicher, da man eigene Datentypen anlegen und funktional programmieren kann. Genauer gesagt, wurde sogar in der Sprache F [39] gearbeitet, die eine Teilmenge von Fortran90 ist, aber eine Reihe barocker Sprachelemente verbietet. Das Programm ist dann sowohl mit dem F-Compiler¹ als auch mit Intel-Fortran-Compiler [40] oder Fortran90-Compilern auf Workstations übersetzbar.

Ziel der Parallelisierung war es, wenig an den Originalprogrammen zu ändern und stattdessen die neuen Programmteile, die die parallelen Algorithmen enthalten, so universell wie möglich zu schreiben. Damit war es dann möglich, mit wenig Aufwand weitere Programme zu parallelisieren und mit einer geringen Anzahl unterschiedlicher Quellcode-Dateien auszukommen.

Abbildung B.1 zeigt eine Übersicht der einzelnen Komponenten eines solchen Programms. Im Original hat das Sternhauptprogramm (Mitte), welches ein interaktives Benutzermenü enthält, direkt die NEWTON- und Virial-Routine aufgerufen. Um jedoch auch komplexere Rechnungen ohne Anwenderinteraktion möglich zu machen, wurde ein neues, kurzes Hauptprogramm geschrieben, welches über eine Anwenderschnittstelle gesteuert wird. Will man nun trotzdem das Menü des Originalprogramms verwenden, muß die Menü-Abfrage des ursprünglichen Hauptprogramms in eine Unteroutine verpackt werden. Abgesehen von evtl. zu ändernden globalen Parametern (z. B. Erhöhung der maximal möglichen Zahl von CHEBYSHEV-Koeffizienten) ist dies die einzige notwendige Änderung am Originalprogramm. Die Anwenderschnittstelle tut dann nichts weiter als diese Unteroutine aufzurufen. Will man dagegen automatische Berechnungen durchführen, schreibt man eine eigene Schnitt-

¹Der F-Compiler übersetzt das Programm nach C und verwendet anschließend den gcc [38]. Beide Programme sind auf mehreren Plattformen verfügbar, so daß man sich bei der Programmierung nicht auf Hardware oder Betriebssystem festlegen muß. Gegenüber echten Fortran-Compilern ist das Compilat nur etwa 10% ineffizienter. Erstaunlicherweise läuft das Programm (auf exakt derselben Maschine) unter manchem kommerziellem Betriebssystem bis zu 30% schneller als unter Linux.

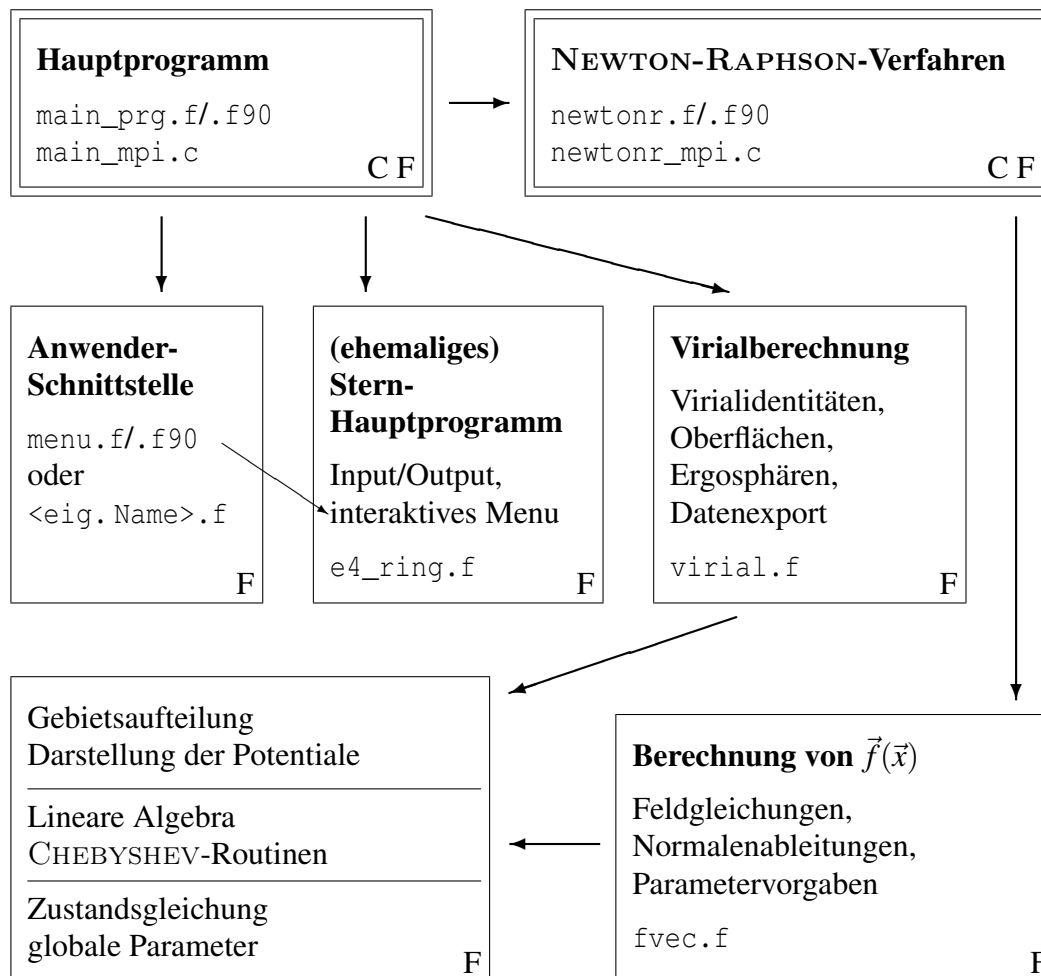


Abbildung B.1: Übersicht der einzelnen Module eines parallelisierten Stern-Programms. Die Pfeile deuten den Aufruf von Unterrouinen an.

stelle und speichert sie unter einem selbst gewählten Namen.

Neben dem neuen Hauptprogramm wurde auch das NEWTON-Verfahren neu implementiert. Zum einen war dies aus Effizienzgründen (vgl. Abschnitt 5.1.3) nötig und zum anderen ist es nun besser steuerbar. Man kann vorgeben, wann und wie oft die alte Matrix verwendet werden darf und bekommt Informationen darüber, wie gut das Verfahren konvergiert hat, bzw. warum es nicht konvergiert hat.

In diesem Stadium kann man nun für das Hauptprogramm und die NEWTON-Routine die MPI-parallelisierten C-Versionen verwenden und damit das Programm auf einem Cluster-Rechner effizient zum Einsatz bringen.² In Abbildung B.1 sind diese Module doppelt um-

²Die Wahl der Sprache C hat dabei mehrere Gründe: Zwar gibt es die MPI-Bibliotheken auch für Fortran77,

rahmt, um anzudeuten, daß sie universell für jedes andere Sternprogramm verwendbar sind. Der Übersetzungsprozeß wird – wie es heute Standard ist – über das Programm Make gesteuert. Auf Basis einer Steuerungsdatei läuft das Compilieren automatisch mit den richtigen Optionen und Bibliotheken ab. Um die Steuerungsdatei (Makefile) ebenfalls universell zu gestalten, sind die konkreten Namen der originalen Fortranmodule in einer weiteren Datei (Makefile.dep) untergebracht. Zum Compilieren gibt man als sogenanntes Target den Namen der Anwender-Schnittstelle und die Art des zu erzeugenden Programms an.

Will man eine normale PC-Version auf Fortran77-Basis mit interaktivem Menu erstellen, ruft man „make menu.ifc“ auf. Zur Berechnung einer ganze Serie (beispielsweise einer Mass-shedding-Sequenz mit adaptiver Schrittweitensteuerung) schreibt man beispielsweise die Schnittstelle massshed.f90. Eine Parallelversion auf Fortran90-Basis wird dann mit „make massshed.mpi90“ generiert.

Um solche Parallelprogramme ausführen zu können, muß man sie üblicherweise in eine Job-Warteschlange einreihen. Das Starten übernimmt dann der Ressourcen-Manager des Systems. Dazu muß man ein kleines Job-Skript schreiben, welches die notwendigen Angaben (notwendige Rechner, Speicher- und Rechenzeitanforderungen, Name der ausführbaren Datei usw.) enthält. Eine Rohversion kann ebenfalls mit Make erzeugt werden („make massshed.job“).

aber nicht Fortran90. Weiterhin verwendet der F-Compiler intern auch C. Letztendlich sträubt sich der Intel-Fortran-Compiler ziemlich beim Linken (Binden) der Fortran-MPI-Bibliotheken. Dagegen ist Compilieren und Linken mit dem gcc erheblich durchsichtiger und besser dokumentiert.

Quellenverzeichnis

Literatur

- [1] ANSORG, MARCUS: *Selbstgravitierende rotierende Gleichgewichtsfiguren in der Newtonschen und Einsteinschen Gravitationstheorie*. Habilitationsschrift, Friedrich-Schiller-Universität Jena (2003).
- [2] ANSORG, M.; KLEINWÄCHTER, A.; MEINEL, R.: *Uniformly rotating axisymmetric fluid configurations bifurcating from highly flattened Maclaurin spheroids* Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **339** (2003), p. 515, [astro-ph/0208267](#).
- [3] ANSORG, M.; FISCHER, T.; KLEINWÄCHTER, A.; MEINEL, R.; PETROFF, D.; SCHÖBEL, K.: *Equilibrium Configurations of Homogeneous Fluids in General Relativity*. Zur Veröffentlichung in Phys. Rev. D (2004), [gr-qc/0402102](#).
- [4] ANSORG, M.; KLEINWÄCHTER, A.; MEINEL, R.: *Highly accurate calculation of rotating neutron stars. Detailed description of the numerical methods*. Astronomy and Astrophysics, **405** (2003), p. 711, [astro-ph/0301173](#).
- [5] ANSORG, M.; KLEINWÄCHTER, A.; MEINEL, R.: *Relativistic Dyson Rings and Their Black Hole Limit*. Astrophysical J. **582** (2003), p. L87, [gr-qc/0211040](#).
- [6] BARDEEN, JAMES: *A Reexamination of the Post-Newtonian Maclaurin Spheroids*. Astrophysical J. **167** (1971), p. 425.
- [7] BARDEEN, J.; HOROWITZ, G.: *The Extreme Kerr Throat Geometry: A Vacuum Analog of $AdS_2 \times S^2$* . Phys. Rev. D **60** (1999), [hep-th/9905099](#).
- [8] BARDEEN, J.; PRESS, W.; TEUKOLSKY, S.: *Rotating Black Holes: Locally Non-rotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation*. Astrophysical J. **178** (1972), p. 347.
- [9] BONAZZOLA, S.; GOURGOULHON, E.: *A virial identity applied to relativistic stellar models*. Classical and Quantum Gravity **11/7** (1994), p. 1775, <http://www.iop.org/EJ/abstract/0264-9381/11/7/014/>.
- [10] BOYD, JOHN. P.: *Chebyshev and Fourier Spectral methods*. Dover (2001), Online-Version: <http://www-personal.engin.umich.edu/~jpboyd/>.

- [11] CHANDRASEKHAR, SUBRAHMANYAN: *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press (1998).
- [12] FLIESSBACH, TORSTEN: *Allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag (1995).
- [13] GOURGOULHON, E.; BONAZZOLA, S.: *A formulation of the virial theorem in general relativity*. Classical and Quantum Gravity **11/2** (1994), p. 443, <http://www.iop.org/EJ/abstract/0264-9381/11/2/015/>.
- [14] HORATSCHEK, STEFAN: *Numerische Bestimmung der Masse-Radius-Relation kugelsymmetrischer Neutronensterne im Rahmen der ART*. Zusatzversuch zum F-Praktikum, Friedrich-Schiller-Universität Jena, (2002).
- [15] MATHEWS, JOHN H.: *Numerical methods for mathematics, science, and engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1992).
- [16] MEINEL, REINHARD: *Black holes: A physical route to the Kerr metric*. Annalen Phys. **11** (2002), p. 509, [gr-qc/0205127](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003681X0200127).
- [17] NEUGEBAUER, G. AND MEINEL, R.: *The Einsteinian Gravitational Field of the Rigidly Rotating Disk of Dust*. Astrophysical J. **414** (1993), p. L97.
- [18] NEUGEBAUER, G. AND MEINEL, R.: *General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions*. Phys. Rev. Lett. **75** (1995), p. 3046.
- [19] OPPENHEIMER, J.; VOLKOV, G.: *On Massive Neutron Cores*. Phys. Rev. **55** (1939), p. 374.
- [20] NOZAWA, T.; STERGIOULAS, N., GOURGOULHON, E.; ERIGUCHI, Y.: *Construction of highly accurate models of rotating neutron stars – comparison of three different numerical schemes*. Astronomy and Astrophysics Supplement, **132** (1998), p. 431, [gr-qc/9804048](http://www.aanda.org/abstract?idref=11111).
- [21] OLOFF, RAINER: *Geometrie der Raumzeit*. 2. Aufl., Vieweg (2002).
- [22] PRESS, W.; TEUKOLSKY, S.; VETTERLING, W.: *Numerical Recipes in Fortran*. 2nd ed., Cambridge University Press (1992).
Online-Version: <http://www.nr.com>.
- [23] SCHÖBEL, KONRAD: *Die Grenzmasse homogener relativistischer Sternmodelle*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena (2003).
- [24] SCHRÖDER, ULRICH: *Gravitation. Einführung in die ART*. Harri Deutsch (2002).
- [25] SHAPIRO, S; TEUKOLSKY, S.: *Black holes, white dwarfs, and neutron stars*. Wiley (1983).

- [26] STEPHANI, HANS: *Allgemeine Relativitätstheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften (1991).
- [27] STEPHANI, H.; KRAMER, D.; MACCALLUM, M.; HOENSELAERS, C.; HERLT, E.: *Exact solutions of Einstein's field equations*. 2nd ed., Cambridge University Press (2003).
- [28] STERGIOULAS, NIKOLAOS: *Rotating Stars in Relativity*. Living Reviews in Relativity **6** (2003),
<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-3>.
- [29] WALD, ROBERT M.: *General Relativity*. University of Chicago Press (1984).

Sonstiges

- [30] FRAUNDIENER, JÖRG: *An Introduction to Spectral Methods*. Vortrag beim SFB-Workshop in Golm, (Oktober 2003).
- [31] KUNZIG, ROBERT: *Black Holes Spin?* In: DISCOVER **23/7** (2002),
<http://www.discover.com/issues/jul-02/cover/>.
- [32] MEINEL, REINHARD: *Relativistische Astrophysik*. Vorlesung an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, (2001).

Software und Dokumentationen

- [33] MPI – Message passing interface. Dokumentation mit Anwendungsbeispielen in C und Fortran. (SP Parallel Programming Workshop, Maui High Performance Computing Center),
<http://www.mhpcc.edu/training/workshop/mpi/MAIN.html>.
- [34] MPICH – A Portable Implementation of MPI. University of Chicago & Mississippi State University,
<http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/mpich/>.
- [35] LAM/MPI Parallel Computing. Open Systems Laboratory (Indiana University),
<http://www.lam-mpi.org>.
- [36] The FFTW package (Fastest Fourier Transform in the West). Entwickelt von MATTEO FRIGO und STEVEN G. JOHNSON (MIT),
<http://www.fftw.org>.

- [37] Netlib Repository. Numerik-Bibliotheken wie ATLAS, LAPACK, ScaLAPACK (Parallelversion von LAPACK),
<http://www.netlib.org>.
- [38] The GNU-Project. Freie Software unter der *GNU General Public License (GPL)*. (gcc, gnu-make, gnuplot, u. v. a.),
<http://www.gnu.org>.
- [39] The F-Compiler. Freier Compiler für die Fortran95-Teilsprache F.
<http://www.fortran.com/F/compilers.html>.
- [40] IFC – Intel Fortran Compiler (frei verfügbar als Linux-Version).
<http://www.intel.com/software/products/compilers/clin/noncom.htm>.
- [41] MuPAD – Multi Processing Algebra Data Tool. Für Wissenschaft und Forschung frei verfügbares Computeralgebrasystem (Universität Paderborn).
http://www.mupad.de/index_uni.shtml.
- [42] CTAN – The Comprehensive TeX Archive Network. Software und Dokumentationen rund um das Textsatzsystem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ($\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, MetaPost, Pakete: hyperref, texpower, u. a.),
<http://www.ctan.org>.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Jena, den 15. Dezember 2003

Thomas Fischer

Danksagung

Zunächst möchte ich die stets angenehme und ausgesprochen konstruktive Zusammenarbeit in der gesamten Arbeitsgruppe unter Leitung von Prof. REINHARD MEINEL hervorheben. Herrn MEINEL gebührt besonderer Dank für die Bereitstellung eines interessanten Themas sowie die hervorragende fachliche Betreuung.

Für die vielen ausführlichen fachlichen Diskussionen und Anregungen möchte ich mich ganz herzlich bei Dr. MARCUS ANSORG und Dr. DAVID PETROFF bedanken. Aber auch den anderen Kollegen, Dr. ANDREAS KLEINWÄCHTER, KONRAD SCHÖBEL und STEFAN HORATSCHEK, bin ich für ihre Kooperation und Hilfestellung bei vielfältigen Angelegenheiten und Problemen zu großem Dank verpflichtet.

Weiterhin bedanke ich mich für die Zusammenarbeit, insbesondere die Bereitstellung von Computer-Ressourcen, beim Institut für Technische Informatik der Friedrich-Schiller-Universität. Namentlich sind dabei MICHAEL SCHNUPP für die gemeinsame Erstellung der Parallelprogramme und CHRISTIAN KAUSAUS als Systembetreuer für die technische Unterstützung zu nennen.

Desweiteren möchte ich mich bei ANGELA DIETZ und DAVID PETROFF für die intensive Durchsicht des Manuskriptes, sowie bei Herrn Prof. GERNOT NEUGEBAUER für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken.

Jena, den 15. Dezember 2003

Thomas Fischer